ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ιωάννης Π. Ζώης
E-mail: `i.zois@exeter.oxon.org`

4 Νοεμβρίου 2009

Περιεχόμενα

1 Πρόλογος **9**

2 Εισαγωγή **10**

3 Προβολικοί Χώροι **13**
3.1 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας 13
3.2 Ορισμός Προβολικού Χώρου 16
3.3 Υπόχωροι του Προβολικού Χώρου 19
3.4 Βασικές Ιδιότητες Προβολικών Χώρων 19
3.5 Ομογενείς και Ανομογενείς Συντεταγμένες 21
3.6 Παραδείγματα Προβολικών Χώρων 22
3.7 Παράρτημα: Στερεογραφική Προβολή 30

4 Προβολικοί Μετασχηματισμοί **33**
4.1 Βασικοί Ορισμοί 33
4.2 Σημεία σε Γενική Θέση 37
4.3 Προβολικοί Μετασχηματισμοί και Σχέδιο 41

5 Δυϊσμός **45**
5.1 Δυϊκός Προβολικός Χώρος και Αρχή Δυϊσμού 45
5.2 Μηδενιστής Διανυσματικού Χώρου και Δυϊσμός 49
5.3 Εφαρμογές Δυϊσμού: Θεώρημα Desargues, Θεώρημα Πάππου . . 52

6 Καμπύλες β′ βαθμού (Quadrics) **59**
6.1 Διγραμμικές Μορφές 59
6.2 Παραδείγματα Καμπυλών β′ βαθμού 65
6.3 Περαιτέρω Παραδείγματα Κωνικών στο Πραγματικό Προβολικό Επίπεδο 68
6.4 Γενικευμένες Κωνικές 69
6.5 Μια Εφαρμογή από την Αλγεβρική Γεωμετρία 71

7 Γραμμικοί Χώροι Τετραγωνικών **74**
7.1 Το Ορθογώνιο Συμπλήρωμα 74
7.2 Παραδείγματα Τετραγωνικών Καμπυλών και Επιφανειών 78

8 Γραφίδες Τετραγωνικών (Pencils of Quadrics) **82**
8.1 Διαγωνιοποίηση Ζεύγους Πινάκων 82
8.2 Γραφίδες στο Μιγαδικό Προβολικό Επίπεδο 84

9 Το Εξωτερικό Γινόμενο **90**
9.1 Αναπαράσταση επιπέδων του χώρου μέσω του εξωτερικού γινομένου 90
9.2 Δεύτερη εξωτερική δύναμη ενός διανυσματικού χώρου και το σφηνοειδές γινόμενο 92

10 Η Εξωτερική Άλγεβρα **97**
10.1 Ανώτερες εξωτερικές δυνάμεις ενός διανυσματικού χώρου 97
10.2 Παραδείγματα 103

11 Η Τετραγωνική Klein **105**
11.1 Η συνθήκη αποσύνθεσης 105
11.2 Η γεωμετρική ερμηνεία της τετραγωνικής Klein 107

12 Γραμμικοί Υπόχωροι της Τετραγωνικής Klein **109**
12.1 Γεωμετρική ερμηνεία των υποχώρων της Τετραγωνικής Klein . . 109
12.2 Σχόλια 112

13 Προσέγγιση Klein της Γεωμετρίας και Ομοπαραλληλική Γεωμετρία **115**
13.1 Ο ρόλος των ομάδων μετασχηματισμών 115
13.2 Η Ομάδα GL_n των Γενικών Γραμμικών Μετασχηματισμών . . . 116
13.3 Στοιχεία Θεωρίας Ομάδων 118
13.4 Η Ομάδα των Προβολικών Μετασχηματισμών PGL_n 119
13.5 Η ομάδα των προβολικών μετασχηματισμών της ευθείας και Ομοπαραλληλικοί Μετασχηματισμοί 122
13.6 Ομοπαραλληλική Γεωμετρία και η Ομοπαραλληλική Ομάδα A_n . 128

14 Οπτική και Ειδική Θεωρία Σχετικότητας **130**
14.1 Οπτική Gauss 130
14.2 Ειδική Θεωρία Σχετικότητας 133

15 Υποομάδες της Προβολικής Ομάδας του Μιγαδικού Επιπέδου $PGL_2(\mathbb{C})$ **136**

16 Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία **140**

17 Το Αξίωμα της Παραλληλίας **145**
17.1 Το Ευκλείδειο Αίτημα 145
17.2 Τα Αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας 146
17.3 Η προβολική γεωμετρία και τα αξιώματα του Ευκλείδη 150
17.4 Ευθείες του άνω μιγαδικού ημιεπιπέδου 151

17.5 Γωνίες στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο 152
17.6 Συζυγία Τριγώνων 153

18 Παράρτημα **155**

Σύντομο βιογραφικό σημείωμα του συγγραφέα:

Ο Ιωάννης Παναγιώτου Ζώης γεννήθηκε το 1968 στη Βέροια. Μετά το πέρας των προπτυχιακών του σπουδών στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, απ΄ όπου αποφοίτησε με Άριστα, συνέχισε τις μεταπτυχιακές του σπουδές στην Αγγλία: Μάστερ (Part III of the Mathematical Tripos) στο Πανεπιστήμιο του Κέιμπριτζ (Κολλέγιο Εμμανουήλ) και Διδακτορικό στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης (Κολλέγιο Έξετερ). Η τριμελής επιτροπή της διδακτορικής του διατριβής απαρτιζόταν από τους καθηγητές Simon K. Donaldson FRS (Fields Medal 1986, Crafoord Prize 1996), Roger Penrose FRS και Sheung-Tsoun Tsou. Ήταν υπότροφος, μεταξύ άλλων, της Ευρωπαϊκής Ένωσης, της Βρεττανικής Κυβέρνησης, του ΙΚΥ (Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών), του Κοινωφελούς Ιδρύματος *Α.Σ. Ωνάσης* και του Κοινωφελούς Ιδρύματος *Α.Γ. Λεβέντης*. Έχει εργασθεί στο παρελθόν ως ερευνητής και πανεπιστημιακός δάσκαλος στα Πανεπιστήμια της Οξφόρδης και του Κέιμπριτζ της Αγγλίας, στο Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) (ως μέλος της ερευνητικής ομάδας του καθηγητή Alain Connes–Fields Medal 1982, Crafoord Prize 2002–) και στην École Normale Superieure (ENS) στο Παρίσι της Γαλλίας και αλλού. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εμπίπτουν στα γνωστικά αντικείμενα της Μη-μεταθετικής Γεωμετρίας, της Τοπολογίας και Γεωμετρίας των Πολλαπλοτήτων (ειδικότερα των Πολλαπλοτήτων Χαμηλών Διαστάσεων) και εφαρμογές αυτών στη Θεωρητική Φυσική (Κοσμολογία, Θεωρίες Ενοποίησης, Θεωρία Χορδών/Μεμβρανών). Έχει δημοσιεύσει μέχρι στιγμής περίπου είκοσι άρθρα σε διεθνή ερευνητικά επιστημονικά περιοδικά (σε ηλεκτρονική και έντυπη μορφή).

♠ *in girum imus nocte et consumimur igni*

Αντί Βιβλιογραφίας:

Οι διδακτικές αυτές σημειώσεις προήλθαν από το μάθημα του 3ου εξαμήνου (2ου έτους) *Προβολική Γεωμετρία* που ο συγγραφέας δίδαξε κατά το ακαδημαϊκό έτος 2005-2006 στην Ανώτατη Σχολή Τοπογραφίας της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού (ΓΥΣ), σχολή που ακολουθεί το πρόγραμμα σπουδών της σχολής Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου της Αθήνας (ΕΜΠ).

Η ύλη του μαθήματος βασίστηκε εν πολλοίς στο μάθημα του 3ου τριμήνου του πρώτου έτους *Προβολική Γεωμετρία* το οποίο ο συγγραφέας είχε διδάξει στο παρελθόν στους προπτυχιακούς φοιτητές των Μαθηματικών Τμημάτων των Πανεπιστημίων της Οξφόρδης και του Κέιμπριτζ της Αγγλίας. (Σημειώνουμε πως στην πιο έγκυρη πρόσφατη διεθνή λίστα με τα 200 κορυφαία πανεπιστήμια του κόσμου των εφημερίδων Times Λονδίνου και Ν. Υόρκης καθώς και του περιοδικού Time, τα εν λόγω πανεπιστήμια βρίσκονται στις θέσεις 1 και 2 στην επί μέρους κατάταξη που αφορά τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες).

Το πρωτογενές υλικό των σημειώσεων αυτών (και της ύλης κατ΄ επέκταση) προέρχεται από τις εξαιρετικές σημειώσεις του καθηγητή Nigel J. Hitchin FRS, σήμερα στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης αλλά παλαιότερα στο Πανεπιστήμιο του Κέιμπριτζ της Αγγλίας.

Πέρα από τη μετάφραση των σημειώσεων στα ελληνικά έγινε και μια προσπάθεια να αναλυθούν περισσότερο πολλά σημεία αλλά και να εμπλουτισθούν με κάποιες επιπλέον εφαρμογές. Ταυτόχρονα συμπεριελήφθησαν και αρκετοί ορισμοί από άλλους κλάδους των μαθηματικών (κυρίως από την Άλγεβρα αλλά και από την Τοπολογία, τη Γεωμετρία κ.ά.) ώστε να γίνουν οι σημειώσεις αυτές κατά το δυνατό αυτοδύναμες στην μελέτη τους. Η πρόθεση ήταν αφ΄ ενός να προσφερθεί ένα μάθημα υψηλού προπτυχιακού επιπέδου σύμφωνα με τα διεθνή πρότυπα, αλλά ταυτόχρονα η ύλη να είναι προσιτή και σε ένα ακροατήριο με τεχνολογική κατεύθυνση.

Εκφράζονται θερμές ευχαριστίες αρχικά προς τον καθηγητή Nigel J. Hitchin για τη σημαντική συμβολή του στο όλο εγχείρημα, προς τον Εμμανουήλ Μεγαλοοικονόμου για την πολύτιμη βοήθειά του στην εξεύρεση και χρήση ελληνικής έκδοσης του Latex το οποίο χρησιμοποιήθηκε για την δακτυλογράφηση των σημειώσεων αλλά και στην Ελισάβετ Γιαννούτσου που είχε την φιλολογική επιμέλεια των σημειώσεων. Τέλος ιδιαίτερες ευχαριστίες εκφράζονται και προς τους φοιτητές για τον ενθουσιασμό τους, την διάθεση για μελέτη, την ενθάρρυνση, τις παρατηρήσεις και τα ποικίλα σχόλιά τους. Η διδασκαλία εί-

ναι αμφίδρομη διαδικασία και χωρίς τη δική τους συμβολή είναι αμφίβολο αν το μάθημα θα είχε αυτή τη μορφή. Η ελπίδα είναι να μην απογοητεύθηκαν οι φοιτητές και επίσης να μην απογοητευθούν και οι τυχόν λοιποί αναγνώστες.
Αθήνα, Μάιος 2006
Ι.Π.Ζ.

1 Πρόλογος

Οι διδακτικές αυτές σημειώσεις αφορούν το κομμάτι της γεωμετρίας που θα μπορούσε γενικά να χαρακτηρισθεί *γραμμική*, σε αντιδιαστολή με τη *μη-γραμμική* θεωρία της τοπολογίας ή της διαφορικής γεωμετρίας. Από τη χρήση του όρου γραμμική καταλαβαίνει εύκολα κάποιος ότι η γραμμική άλγεβρα παίζει σημαντικό ρόλο. Γι' αυτό ξεκινάμε με τις παραγράφους 3-8 όπου αναφέρουμε ουσιαστικά στοιχεία από τη θεωρία των διανυσματικών χώρων (πεπερασμένης διάστασης), τα οποία όμως αποκτούν γεωμετρική υπόσταση μέσω της προβολικής γεωμετρίας. Οι παράγραφοι 9 και 10 επεκτείνουν αυτή τη γραμμική άλγεβρα ορίζοντας διαφορικές μορφές και το εξωτερικό γινόμενο μεταξύ αυτών. Το κίνητρο προέρχεται από την προσπάθεια περιγραφής ευθειών στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Οι παράγραφοι 11 και 12 επιλύουν το πρόβλημα της περιγραφής των ευθειών διατυπώνοντας την αντιστοιχία Klein. Οι παράγραφοι 13-15 περιγράφουν την προσέγγιση Klein της γεωμετρίας ως μελέτη αναλλοίωτων ποσοτήτων κάτω από κάποια ομάδα μετασχηματισμών, προσέγγιση που είναι γνωστή ως *πρόγραμμα Erlangen*, *(Erlangen Programm)*, μαζί με κάποιες εφαρμογές από τη φυσική. (Το πρόγραμμα αυτό άρχισε από τον F. Klein το 1872 όταν έγινε καθηγητής στο πανεπιστήμιο της πόλης Erlangen που βρίσκεται κοντά στη Νυρεμβέργη). Τέλος η παράγραφος 16 εξετάζει το υπερβολικό επίπεδο υπό το πρίσμα της κλασικής αξιωματικής προσέγγισης της γεωμετρίας μέσω των αξιωμάτων του Ευκλείδη. Στο Παράρτημα (Παράγραφος 17) βρίσκονται συγκεντρωμένοι διάφοροι χρήσιμοι πιθανώς για τον αναγνώστη ορισμοί.

Όσον αφορά τα προαπαιτούμενα για τη μελέτη των σημειώσεων αυτών, επισημαίνεται ότι, αν και καταβλήθηκε προσπάθεια οι σημειώσεις να είναι μαθηματικά αυτόνομες, θα ήταν χρήσιμο οι αναγνώστες να έχουν στο παρελθόν παρακολουθήσει ένα μάθημα γραμμικής άλγεβρας που να καλύπτει τη βασική ύλη από τη θεωρία (πραγματικών κυρίως) διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Ένα κλασικό σύγγραμμα για τη μελέτη των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι για παράδειγμα το βιβλίο του *P.B. Halmos: "Finite Dimensional Vector Spaces"*.

Οι διάφορες προτάσεις, ορισμοί, θεωρήματα, αναφέρονται αρχικά με τον αριθμό της παραγράφου στην οποία βρίσκονται, ακολουθούμενο από το συγκεκριμένο αριθμό της πρότασης μέσα στην εν λόγω παράγραφο. Για παράδειγμα η πρόταση 4.1.2 αναφέρεται στην πρόταση 2 της παραγράφου 4.1, ενώ το τέλος μιας απόδειξης συμβολίζεται με ένα λευκό τετράγωνο.

2 Εισαγωγή

Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κάποιος για ποιο λόγο να μελετήσει κανείς άλλη γεωμετρία εκτός από την Ευκλείδεια γεωμετρία στις 3 διαστάσεις, που αναπαριστά το φυσικό μας κόσμο μέσα στον οποίο ζούμε και η οποία περιγράφεται μαθηματικά από τα διανύσματα εφοδιασμένα με το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο αυτών. Για να δώσουμε μια πειστική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, η οποία ταυτόχρονα θα μας δώσει και κίνητρα για τη μελέτη του εν λόγω μαθήματος, θα αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα στα οποία η χρήση της Ευκλείδειας γεωμετρίας δεν είναι η πλέον κατάλληλη.

Α. Προβολές

Οι καλλιτέχνες (για παράδειγμα ζωγράφοι αλλά όχι μόνο) της Αναγέννησης αντιμετώπιζαν το πρόβλημα της αναπαράστασης του φυσικού κόσμου σε κάποιο πίνακα. Πιο συγκεκριμένα ήθελαν να αναπαραστήσουν διάφορες 2-διάστατες όψεις (κατόψεις) 3-διάστατων αντικειμένων. Ο τρόπος που έλυσαν το πρόβλημα ήταν να θεωρήσουν το μάτι του καλλιτέχνη ως ένα σημείο, έστω P, στο χώρο. Κάθε σημείο του πραγματικού αντικειμένου που ήθελαν να αναπαραστήσουν, έστω A, ορίζει μια ευθεία με το μάτι στο χώρο, την PA. Αν παρεμβάλουμε μια διάφανη οθόνη μεταξύ του ματιού και του αντικειμένου, αυτή τέμνει την ευθεία PA σε ένα σημείο, έστω A'. Μεταβάλλοντας το σημείο A έτσι ώστε να καλύψει όλο το αντικείμενο, τότε τα αντίστοιχα σημεία A' επί της οθόνης συνιστούν την *προβολή* του φυσικού αντικειμένου πάνω στη δοσμένη οθόνη.

Το σημερινό αντίστοιχο του καλλιτέχνη της Αναγέννησης, εκτός βέβαια από τους σύγχρονους καλλιτέχνες, είναι οι σχεδιαστές και οι μηχανικοί, οι οποίοι πολλές φορές, σε αντίθεση με τους κατασκευαστές μοντέλων ή μακετών που δουλεύουν στο χώρο των 3 διαστάσεων, χρειάζεται να απεικονίσουν ένα 3-διάστατο αντικείμενο στο επίπεδο από διαφορετικές όψεις. Αυτό ακριβώς επιτυγχάνεται μέσω της *προβολικής γεωμετρίας*. Στην πραγματικότητα, οι αναπαραστάσεις στο επίπεδο ενός 3-διάστατου αντικειμένου από διαφορετική οπτική γωνία προκύπτουν όπως θα δούμε, μέσω *προβολικών μετασχηματισμών*.

Β. Ειδική Θεωρία Σχετικότητας

Στην Ειδική Θεωρία Σχετικότητας, (A. Einstein 1905), βασικό ρόλο παίζει η ομάδα Lorentz των λεγόμενων *ψευδο-ορθογώνιων* μετασχηματισμών (με ορίζουσα ίση με $+1$) στον *επίπεδο χωρόχρονο 4-διαστάσεων* (στροφές που διατηρούν αναλλοίωτη τη μετρική Minkowski). Για να βρούμε όμως την πλήρη ομάδα συμμετρίας πρέπει να συμπεριλάβουμε και τις μετατοπίσεις στις 4-διαστάσεις, οπότε καταλήγουμε στην ομάδα Poincaré, η οποία αποτελεί αντίστοιχη της ομάδας μετασχηματισμών του Γαλιλαίου της κλασικής φυσικής. Κάνοντας μια στροφή

Wick, δηλαδή θεωρώντας το χρόνο φανταστικό, η μετρική Minkowski αποκτά Ευκλείδεια υπογραφή (σε 4 διαστάσεις) και η ομάδα Lorentz γίνεται η ομάδα των *ειδικών ορθογώνιων μετασχηματισμών* (ορθογώνιοι μετασχηματισμοί με ορίζουσα ίση με +1) στις 4 διαστάσεις. Η ομάδα Poincaré όμως μπορεί να θεωρηθεί ως η ομάδα προβολικών μετασχηματισμών $PGL_2(\mathbb{C})$ του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}^2$.

Γ. Τομογραφία

Μια διαφορετική πλευρά της γεωμετρίας είναι η μελέτη όχι των σημείων αλλά των ευθειών ή των επιπέδων στο χώρο. Για παράδειγμα μπορεί κανείς να ρωτήσει ποια είναι η γεωμετρία του χώρου των ευθειών του Ευκλείδειου 3-διάστατου χώρου. Μια ευθεία μπορεί επίσης να ορισθεί από τα σημεία τομής της με δύο επίπεδα στο χώρο, οπότε μπορεί να καθορισθεί μέσω δύο παραμέτρων. Συνεπώς ο χώρος των ευθειών του Ευκλείδειου 3-διάστατου χώρου αποτελεί χώρο διάστασης 2, *αλλά όχι Ευκλείδειο χώρο.* Έχει τη δική του γεωμετρία, όπως θα δούμε.

Υπάρχουν τόσο μαθηματικά όσο και πρακτικά προβλήματα, στα οποία οι ευθείες είναι πιο σημαντικές από τα σημεία. Για παράδειγμα, περιπτώσεις που αφορούν σαρωτές (scanners) ακτίνων X. Η επιστήμη αυτή λέγεται *τομογραφία.* Ο σαρωτής παράγει ακτίνες X κατά μήκος διαφόρων διευθύνσεων στο χώρο. Όταν μία από αυτές διέρχεται μέσα από το σώμα ενός ασθενούς (ή μέσα από οποιοδήποτε αντικείμενο), εκτελείται μια μέτρηση που αναπαριστά τη μέση πυκνότητα ύλης κατά μήκος της διερχόμενης ακτίνας. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού *το χώρο των ευθειών του* $\mathbb{R}^3$. Το ζητούμενο είναι μια συνάρτηση της πυκνότητας του σώματος με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^3$, δηλαδή το χώρο των σημείων. Για να γίνει αυτή η μετατροπή, χρειαζόμαστε τη σχέση μεταξύ σημείων και ευθειών. Για παράδειγμα, οι ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο, διαγράφουν ένα επίπεδο στο χώρο των ευθειών. Αυτή η γεωμετρία, που δεν είναι Ευκλείδεια, λέγεται γεωμετρία Klein (προς τιμήν του Γερμανού μαθηματικού Felix Klein, που έζησε στο δεύτερο μισό του 19ου έως τις αρχές του 20ου αιώνα), και την οποία θα μελετήσουμε σε αυτό το μάθημα. Εγκυκλοπαιδικά αναφέρουμε επίσης, πως ο συνδυασμός της γεωμετρίας Klein με τους προβολικούς μετασχηματισμούς της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (βλ. παράδειγμα 2 παραπάνω) αποτελούν τη βάση της περίφημης *συστροφικής γεωμετρίας* (twistor geometry) του κορυφαίου διεθνώς σήμερα μαθηματικού κοσμολόγου Roger Penrose η οποία (συστροφική γεωμετρία) αποτελεί (εκτός των άλλων) και μια προσπάθεια για την ενοποίηση όλων των φυσικών αλληλεπιδράσεων.

Δ. Γεωμετρική Οπτική

Ο χώρος των ευθειών του $\mathbb{R}^3$ εμφανίζεται στη φυσική και με κάποιο διαφορετικό τρόπο, στη μελέτη οπτικών διατάξεων (συστημάτων κατόπτρων και φακών). Σε αυτή την περίπτωση οι φωτεινές ακτίνες διαθέτουν και φορά διάδοσης, οπότε αποτελούν *κατευθυνόμενες ευθείες*. Όταν μια φωτεινή ακτίνα (κατευθυνόμενη ευθεία) μπει σε μια οπτική διάταξη, θα υποστεί σειρά ανακλάσεων, διαθλάσεων, κλπ. και στην έξοδο της οπτικής διάταξης θα πάρουμε μια άλλη φωτεινή ακτίνα (κατευθυνόμενη ευθεία). Η οπτική διάταξη συνεπώς ασκεί ένα μετασχηματισμό στον (μαθηματικό) χώρο των κατευθυνόμενων ευθειών του φυσικού χώρου. Η μελέτη αυτών των μετασχηματισμών αποτελεί τη βάση της γεωμετρικής προσέγγισης στην οπτική.

Υπάρχουν και πολλοί άλλοι τομείς όπου είναι χρήσιμη η προβολική γεωμετρία: για παράδειγμα, αν αντί του σώματος των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ επιλέξουμε ένα άλλο πεπερασμένο σώμα, η προβολική γεωμετρία χρησιμοποιείται στη θεωρία κωδίκων, στην κρυπτογραφία, στον σχεδιασμό λογισμικού για προγράμματα σχεδίασης σε Η/Υ αλλά και στη θεωρία αριθμών. Γενίκευση της προβολικής γεωμετρίας αποτελεί η μελέτη των *προβολικών ποικιλιών* (projective varieties) η οποία ανήκει στο χώρο της αλγεβρικής γεωμετρίας. Η αλγεβρική γεωμετρία έχει στενότατη σχέση με τη θεωρία αριθμών και το πρόγραμμα Atiyah-Langlands για την ενοποίηση των μαθηματικών.

3 Προβολικοί Χώροι

3.1 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Υπενθυμίζουμε ορισμένες βασικές έννοιες από τη γραμμική άλγεβρα.

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα με χαρακτηριστική διάφορη του 2 (δηλαδή ισχύει ότι $1+1 \neq 0$, όπου 0 και 1 τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σώμα αντίστοιχα) και V ένα μη-κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη '+' που θα τη λέμε *πρόσθεση*, (δηλαδή η πράξη $+$ είναι μια απεικόνιση $+ : V \times V \to V$) και με μια εξωτερική πράξη '$\cdot$' που θα τη λέμε *βαθμωτό πολλαπλασιασμό*, (δηλαδή η πράξη $\cdot$ είναι μια απεικόνιση $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$).

Ορισμός 1. Το σύνολο V εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις θα λέγεται *διανυσματικός χώρος* με σώμα $\mathbb{F}$ (συνήθως το σώμα θα είναι οι πραγματικοί ή οι μιγαδικοί αριθμοί) αν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:
• Το ζεύγος $(V, +)$ αποτελεί *Αβελιανή ομάδα* (δηλαδή ισχύουν η προσεταιριστική ιδιότητα, η αντιμεταθετική ιδιότητα και υπάρχει ουδέτερο στοιχείο καθώς και το συμμετρικό κάθε στοιχείου του V).
• Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες (υποθέτουμε ότι $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $a, b \in V$):
$\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$
$(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$
$(\lambda\mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$, όπου στην αριστερή παρένθεση εννοείται ο πολλαπλασιασμός μεταξύ των στοιχείων του σώματος
$1 \cdot a = a$, όπου $1 \in \mathbb{F}$ το μοναδιαίο στοιχείο (ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού) στο σώμα $\mathbb{F}$.

Παράδεγμα 1: Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του επιπέδου ή του χώρου αποτελούν παραδείγματα πραγματικών διανυσματικών χώρων με πράξεις την γνωστή πρόσθεση διανυσμάτων (κανόνας παραλληλογράμμου) και βαθμωτό πολλαπλασιασμό τον γνωστό πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα.

Σημείωση 1: Στη συνέχεια για απλοποίηση του συμβολισμού θα παραλείπουμε το σύμβολο $\cdot$ του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Επίσης δεν θα αναφέρουμε το σώμα όταν είναι σαφές για ποιο σώμα μιλάμε (συνήθως θα είναι οι πραγματικοί αριθμοί).

Μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα $v, w \in V$ για να πάρουμε το διάνυσμα $v + w \in V$ και να πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία του V με τα στοιχεία

$\lambda \in \mathbb{F}$ και να παίρνουμε το στοιχείο $\lambda v \in V$. Αυτές οι δύο πράξεις ικανοποιούν τις γνωστές ιδιότητες των διανυσματικών χώρων (προσεταιριστική, επιμεριστική και αντιμεταθετική).

Ορισμός 2. Ένας *διανυσματικός υπόχωρος* $U \leq V$ είναι ένα υποσύνολο U του V, το οποίο είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό, δηλαδή, αν για κάθε $v, w \in U$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, ισχύει ότι $v + w \in U$ και $\lambda v \in U$. Με άλλα λόγια, το U αποτελεί το ίδιο ένα νέο διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης με τις ίδιες πράξεις και το ίδιο σώμα όπως το V.

Ορισμός 3. Εάν U_1 και U_2 είναι δύο διαφορετικοί διανυσματικοί υπόχωροι του ίδιου διανυσματικού χώρου V, δηλαδή $U_1 \leq V$ και $U_2 \leq V$, τότε ορίζουμε το *(ευθύ) άθροισμα* $U_1 + U_2$ των υποχώρων U_1 και U_2 του V ως το σύνολο των διανυσμάτων $v \in V$ τα οποία μπορούν να γραφούν στη μορφή $v = u_1 + u_2$ με $u_1 \in U_1$ και $u_2 \in U_2$ αντίστοιχα.

Ορισμός 4. Η *τομή* των διανυσματικών υποχώρων $U_1 \cap U_2$ του V ορίζεται ως το σύνολο των στοιχείων του V που περιέχονται τόσο στον U_1 όσο και στον U_2.

Σημείωση 2: Υπενθυμίζουμε ότι τόσο η τομή όσο και το (ευθύ) άθροισμα διανυσματικών υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου αποτελούν νέους διανυσματικούς υποχώρους (*δεν* συμβαίνει βέβαια το ίδιο και με την *ένωση* διανυσματικών υποχώρων).

Ορισμός 5. Μια *βάση* του V αποτελείται από ένα σύνολο διανυσμάτων $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ του V τα οποία είναι μεταξύ τους *γραμμικά ανεξάρτητα* (δηλαδή κανένα τους δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων) και τα οποία *παράγουν* τον V, δηλαδή κάθε στοιχείο $v \in V$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών,

$$v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \tag{1}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{F}$, με $i = 0, 1, 2, ..., n$. Κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης έχει τουλάχιστον μια βάση. Το πλήθος των διανυσμάτων των βάσεων ενός διανυσματικού χώρου είναι σταθερό και ονομάζεται *διάσταση* του διανυσματικού χώρου. Η διάσταση εξαρτάται από το σώμα. *Θα ασχοληθούμε με διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.* Στο παραπάνω παράδειγμα, $dim_{\mathbb{F}} V = n + 1$.

Αν επιλέξουμε μια βάση $\{v_i\}_{(i=0,1,...,n)}$ στον V, τότε κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται με *μοναδικό* τρόπο ως

$$v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \tag{2}$$

και οι συντελεστές $\lambda_i \in \mathbb{F}$, με $i = 0, 1, 2, ..., n$, λέγονται *συντεταγμένες* του διανύσματος $v \in V$ ως προς τη συγκεκριμένη βάση (οι συντεταγμένες εξαρτώνται από την επιλογή βάσης).

Σημείωση 3: Υπενθυμίζουμε πως για το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ διάστασης 2, τα διανύσματα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ αποτελούν τη λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^2$. Ανάλογα για το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ διάστασης 3, τα διανύσματα $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ αποτελούν τη λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^3$. Η γενίκευση είναι προφανής όχι μόνο για το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ με οποιαδήποτε πεπερασμένη διάσταση $n \in \mathbb{N}$ αλλά και για κάθε σώμα $\mathbb{F}$.

Ορισμός 6. Έστω V και W δύο διανυσματικοί χώροι με το ίδιο σώμα $\mathbb{F}$. Μια απεικόνιση $f : V \to W$ θα λέγεται *γραμμική* αν ισχύει το εξής:

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)$$

$\forall v_1, v_2 \in V$ και $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

Η βασική σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των διανυσματικών χώρων είναι η έννοια του *ισομορφισμού*:

Ορισμός 7. Δύο διανυσματικοί χώροι V και W (με το ίδιο σώμα) λέγονται *ισόμορφοι*, γεγονός που θα το συμβολίζουμε $V \cong W$, αν υπάρχει μεταξύ τους γραμμική απεικόνιση που να είναι 1-1 και επί.

Το παρακάτω θεώρημα επιλύει το πρόβλημα της *κατηγοριοποίησης* των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης (classification problem) και μας λέει πως η βασική αναλλοίωτη ποσότητα στους διανυσματικούς χώρους είναι η διάστασή τους:

Θεώρημα 1. *Δύο διανυσματικοί χώροι (πεπερασμένης διάστασης και με το ίδιο σώμα) είναι ισόμορφοι εάν και μόνο εάν έχουν την ίδια διάσταση.*

Ισχύει η παρακάτω χρήσιμη πρόταση:

Πρόταση 1. Αν U_1 και U_2 είναι δύο διανυσματικοί υπόχωροι του ιδίου διανυσματικού χώρου V, τότε ισχύει η εξής θεμελιώδης σχέση μεταξύ των διαστάσεων του αθροίσματος και της τομής διανυσματικών υποχώρων:

$$dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2 - dim(U_1 \cap U_2)$$

3.2 Ορισμός Προβολικού Χώρου

Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης (δηλαδή ως σώμα θεωρούμε το σώμα των πραγματικών αριθμών).

Ορισμός 1. *Ο προβολικός χώρος $P(V)$ ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης ορίζεται ως το σύνολο των μονοδιάστατων διανυσματικών υποχώρων του V.*

Έστω $x \in P(V)$ ένα σημείο του προβολικού χώρου. Σε αυτό βάσει του παραπάνω ορισμού αντιστοιχεί ένας διανυσματικός υπόχωρος $V_x \leq V$ με $dimV_x = 1$. Ένας μονοδιάστατος διανυσματικός υπόχωρος του V αποτελείται από όλα τα βαθμωτά πολλαπλάσια λv, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, ενός συγκεκριμένου μη-μηδενικού διανύσματος $v \in V$. Το v λέγεται *αντιπροσωπευτικό διάνυσμα* του σημείου $x \in P(V)$ που ορίζεται από το συγκεκριμένο μονοδιάστατο υπόχωρο V_x του V. Κάθε άλλο μη-μηδενικό (βαθμωτό) πολλαπλάσιο του v αποτελεί διαφορετικό αντιπροσωπευτικό διάνυσμα του *ίδιου* σημείου $x \in P(V)$. Κάποιες φορές θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $[v]$ για να υποδηλώσουμε το σύνολο (ακριβέστερα την *κλάση*) όλων των διανυσμάτων που αποτελούν βαθμωτά πολλαπλάσια του διανύσματος v. Προφανώς

$$[v] = [\lambda v].$$

Επίσης ένα σημείο του προβολικού χώρου $x \in P(V)$ θα συμβολίζεται και ως $[v]$, δηλαδή με την κλάση ισοδυναμίας των αντιπροσωπευτικών διανυσμάτων του.

Συνεπώς υπάρχει μια πληθώρα αντιπροσωπευτικών διανυσμάτων για κάθε σημείο του προβολικού χώρου. Παρ' ότι το V αποτελεί διανυσματικό χώρο, ο προβολικός χώρος $P(V)$ **δεν** αποτελεί διανυσματικό χώρο. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

Πρόταση 1. *Ο προβολικός χώρος $P(V)$ αποτελεί (πραγματική), (διαφορίσιμη) πολλαπλότητα με διάσταση κατά ένα μικρότερη από τη διάσταση του V, δηλαδή $dimP(V) = (dimV) - 1$.*

Παρατήρηση 1: Από τον ορισμό της πολλαπλότητας προκύπτει ότι ο προβολικός χώρος αποτελεί χώρο που μόνο *τοπικά μοιάζει* (δηλαδή είναι *ομοιομορ-*

φικός) με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{(dimV)-1}$.

Απόδειξη: Δεν θα αποδείξουμε εδώ την Πρόταση 1 (ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρεί την απόδειξη σε πολλά βιβλία διαφορικής γεωμετρίας, όπου μελετώνται διαφορίσιμες πολλαπλότητες), αλλά θα την εξηγήσουμε: θεωρώντας ότι $dimV = n + 1$, πράγμα που σημαίνει πως αν επιλέξουμε μια βάση, χρειαζόμαστε $n + 1$ παραμέτρους (συντεταγμένες) για να περιγράψουμε τα διανύσματα του V, τότε χρειαζόμαστε μια συντεταγμένη λιγότερη για να περιγράψουμε τα σημεία x του προβολικού χώρου $P(V)$ εξαιτίας της ελευθερίας που υπάρχει στην επιλογή του αντιπροσωπευτικού διανύσματος (όλα τα βαθμωτά πολλαπλάσια ενός αντιπροσωπευτικού διανύσματος αποτελούν επίσης ισοδύναμα αντιπροσωπευτικά διανύσματα), με δεδομένο ότι ο προβολικός χώρος ως πολλαπλότητα, τουλάχιστον τοπικά, αποτελεί επίσης διανυσματικό χώρο. Άρα αν $dimV = n + 1$, τότε $dimP(V) = n$. $\square$

• Αν $dimP(V) = 1$ τότε ο προβολικός χώρος $P(V)$ λέγεται *προβολική ευθεία* (προφανώς τότε $dimV = 2$).

• Αν $dimP(V) = 2$ τότε ο προβολικός χώρος $P(V)$ λέγεται *προβολικό επίπεδο* (προφανώς τότε $dimV = 3$).

Σημείωση 1: Αν θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων του 2-διάστατου επιπέδου (ή του 3-διάστατου φυσικού χώρου αντίστοιχα) εφοδιασμένο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων, τότε μπορούμε να ταυτίσουμε τα σημεία του επιπέδου (ή του χώρου αντίστοιχα) με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ των *ελεύθερων* διανυσμάτων του επιπέδου, (ή με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου αντίστοιχα), χρησιμοποιώντας το *διάνυσμα θέσης* του σημείου: Δηλαδή, κάθε σημείο αντιστοιχεί στο ελεύθερο διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας το εν λόγω σημείο. Με αυτόν τον τρόπο αποκτάμε μια αντιστοιχία 1-1 και επί μεταξύ του συνόλου των σημείων του γεωμετρικού επιπέδου (ή του χώρου) με τα στοιχεία του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ των ελεύθερων διανυσμάτων του επιπέδου (ή του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου αντίστοιχα).

Για παράδειγμα, έστω ότι ταυτίζουμε το γεωμετρικό επίπεδο με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ των ελεύθερων διανυσμάτων του επιπέδου, θεωρώντας Καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο με άξονα τετμημένων τον $x'x$, άξονα τεταγμένων τον $y'y$, αρχή το σημείο τομής O με συντεταγμένες $(0, 0)$ και παίρνοντας ως βάση τα γνωστά ορθοκανονικά μοναδιαία διανύσματα $\hat{i} = (0, 1)$ και $\hat{j} = (1, 0)$. Τότε ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^2)$ σύμφωνα με τον ορισμό θα

αποτελείται από το σύνολο των μονοδιάστατων διανυσματικών υποχώρων του $\mathbb{R}^2$. *Γεωμετρικά, αυτό αντιστοιχεί στο σύνολο των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O.* Όμως για να περιγράψουμε μια ευθεία στο επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, απαιτείται μόνο μία παράμετρος, για παράδειγμα η γωνία που σχηματίζει η εν λόγω ευθεία με τον άξονα των τετμημένων, συνεπώς $dimP(\mathbb{R}^2) = 1$. Σημειώνουμε πως μια ευθεία του επιπέδου αποτελείται από άπειρα (υπεραριθμήσιμα) σημεία του επιπέδου αλλά στον προβολικό χώρο ολόκληρη η ευθεία αντιστοιχεί σε ένα και μόνο σημείο του προβολικού χώρου.

Με βάση την παραπάνω ταύτιση του γεωμετρικού επιπέδου (ή του φυσικού 3-διάστατου χώρου) με τον 2-διάστατο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ (ή με τον 3-διάστατο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα), παρατηρούμε πως μόνο οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O αποτελούν διανυσματικούς υποχώρους διάστασης 1 του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ (ή ισοδύναμα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$), διότι οι άλλες ευθείες που υπάρχουν στο επίπεδο (ή στο χώρο αντίστοιχα) αλλά δεν περνούν από την αρχή των αξόνων O *δεν* αποτελούν διανυσματικούς υποχώρους διότι *δεν περιέχουν το μηδενικό διάνυσμα* (που είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης μεταξύ των διανυσμάτων) και που ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων O. Το παραπάνω είναι μια σημαντική λεπτομέρεια διότι το μεν σύνολο των διερχόμενων από την αρχή των αξόνων ευθειών του επιπέδου, και που εξ ορισμού αποτελεί τον προβολικό χώρο $P(\mathbb{R}^2)$, θα δούμε πως αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης 1 που είναι ομοιομορφική με τον κύκλο S^1, ενώ το σύνολο γενικά όλων των ευθειών του επιπέδου, όπως θα δούμε στην τοπολογία των επιφανειών στο μάθημα της *Διαφορικής Γεωμετρίας*, αποτελεί (μη-προσανατολίσιμη, πολλαπλά συνεκτική, λεία) πολλαπλότητα διάστασης 2 που είναι ομοιομορφική με τη δέσμη Möbius.

Αναφέρουμε τέλος πως ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^2)$ μπορεί ισοδύναμα τοπολογικά να θεωρηθεί και ως ο *χώρος πηλίκο* που προκύπτει από το σύνολο όλων των ευθειών του επιπέδου αν το διαιρέσουμε με τη σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται από την παραλληλία μεταξύ των ευθειών του επιπέδου, δηλαδή ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^2)$ μπορεί να ταυτισθεί και με το *χώρο των διευθύνσεων* του επιπέδου. Υπενθυμίζουμε πως στην τοπολογία η έννοια του *ομοιομορφισμού* είναι μία από τις βασικές σχέσεις ισοδυναμίας: δύο (τοπολογικοί) χώροι λέγονται ομοιομορφικοί εάν υπάρχει ματαξύ τους μια απεικόνιση που να είναι 1-1, επί, συνεχής και η αντίστροφή της (που υπάρχει αφού η αρχική είναι 1-1 και επί) είναι επίσης συνεχής.

3.3 Υπόχωροι του Προβολικού Χώρου

Για να ορίσουμε *(γραμμικούς) υπόχωρους* ενός προβολικού χώρου $P(V)$ ξεκινάμε από ένα διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$. Αφού το ίδιο το U αποτελεί διανυσματικό χώρο, μπορούμε να ορίσουμε τον προβολικό χώρο $P(U)$ που αποτελείται από τους μονοδιάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του U. Ο προβολικός χώρος $P(U)$ αποτελεί ένα *γραμμικό υπόχωρο* του προβολικού χώρου $P(V)$, δηλαδή αν $U \leq V$, τότε $P(U) \subseteq P(V)$.

3.4 Βασικές Ιδιότητες Προβολικών Χώρων

Κάποιες ιδιότητες των προβολικών χώρων είναι σύμφωνες με τη διαίσθησή μας, όπως αυτή που περιγράφει η παρακάτω πρόταση (η οποία ισχύει και στην Ευκλείδεια γεωμετρία):

Πρόταση 1. *Υπάρχει μοναδική προβολική ευθεία που ενώνει κάθε ζεύγος από δύο τυχαία διαφορετικά σημεία ενός προβολικού χώρου $P(V)$.*

Απόδειξη: Έστω $x, y \in P(V)$ με $x \neq y$ δύο διαφορετικά σημεία του προβολικού χώρου $P(V)$. Επιλέγουμε αντιπροσωπευτικά διανύσματα $v \in V$ για το x και $w \in V$ για το y. Αφού $x \neq y$ τότε το w δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του v, ή με άλλα λόγια τα διανύσματα v, w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συνεπώς παράγουν ένα διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$ με $dimU = 2$. Τότε $dimP(U) = 1$ και εξ ορισμού τα σημεία $x, y \in P(U)$, συνεπώς η $P(U)$ είναι η ζητούμενη προβολική ευθεία.

Έστω τώρα $P(U')$ μία άλλη προβολική ευθεία που περνά από τα σημεία $x, y \in P(U')$. Τότε αφού $dimP(U') = 1$ έπεται ότι $dimU' = 2$ και ο διανυσματικός υπόχωρος $U' \leq V$ επίσης περιέχει τα αντιπροσωπευτικά διανύσματα v, w των σημείων x, y αντίστοιχα. Αφού όμως τα διανύσματα $v, w \in U'$, τότε και όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί τους επίσης θα ανήκουν στον U' (διότι το U' ως διανυσματικός υπόχωρος του V θα είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό). Όμως τα διανύσματα v, w παράγουν το διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$ οπότε $U \subseteq U'$. Όμως αφού $U \subseteq U'$ και $dimU = dimU'$, έπεται ότι $U = U'$, οπότε η προβολική ευθεία $P(U)$ είναι μοναδική. $\square$

Αντίθετα, η παρακάτω ιδιότητα-κλειδί των προβολικών χώρων **δεν** ισχύει στην Ευκλείδεια γεωμετρία:

Πρόταση 2. *Σε ένα προβολικό επίπεδο κάθε ζευγάρι διαφορετικών προ-*

βολικών ευθειών τέμνεται, δηλαδή δεν υπάρχει η έννοια της παραλληλίας στην προβολική γεωμετρία.

Απόδειξη: Έστω $P(V)$ το προβολικό επίπεδο, δηλαδή $dimP(V) = 2$, οπότε $dimV = 3$ και έστω $P(U_1)$ και $P(U_2)$ δύο *τυχαίες* διαφορετικές προβολικές ευθείες του $P(V)$. Έχουμε δηλαδή $dimP(U_1) = dimP(U_2) = 1$ οπότε $U_1, U_2 \leq V$ και $dimU_2 = dimU_2 = 2$. Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα $U_1 + U_2$. Προφανώς $U_1 \subseteq U_1 + U_2$ οπότε $dimU_1 \leq dim(U_1 + U_2)$.

Έστω ότι ισχύει ισότητα, δηλαδή $dimU_1 = dim(U_1 + U_2)$. Τότε όμως $U_1 = U_1 + U_2$ οπότε κάθε διάνυσμα του U_2 θα ανήκει και στον U_1 (η u_1 συνιστώσα μηδενίζεται), οπότε $U_2 \subseteq U_1$. Αφού $dimU_1 = dimU_2 = 2$, αυτό θα σημαίνει ότι $U_1 = U_2$ οπότε και $P(U_1) = P(U_2)$, *άτοπο*, διότι υποθέσαμε διαφορετικές προβολικές ευθείες.

Συνεπώς αναγκαστικά θα πρέπει $dimU_1 < dim(U_1+U_2)$. Θα έχουμε λοιπόν $2 = dimU_1 < dim(U_1+U_2)$. Όμως η διάσταση των διανυσματικών χώρων είναι φυσικός αριθμός, άρα θα πρέπει $dim(U_1 + U_2) \geq 3$. Όμως $U_1 + U_2 \leq V$ και $dimV = 3$, οπότε $dim(U_1 + U_2) = 3$. Εφαρμόζοντας τη σχέση που συνδέει τη διάσταση της τομής με τη διάσταση του ευθέως αθροίσματος των διανυσματικών υποχώρων (Πρόταση 3.1.1), παίρνουμε:

$$dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2 - dim(U_1 \cap U_2)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές $dimU_1 = dimU_2 = 2$ και $dim(U_1 + U_2) = 3$ στην παραπάνω σχέση θα πάρουμε ότι $dim(U_1 \cap U_2) = 1$. Άρα λοιπόν υπάρχει μοναδικός διανυσματικός υπόχωρος του V με διάσταση 1, ο $U_1 \cap U_2$, ο οποίος περιέχεται στον U_1 και στον U_2. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό σημείο που ανήκει στην προβολική ευθεία $P(U_1)$ αλλά και στην προβολική ευθεία $P(U_2)$ και το σημείο αυτό είναι ο προβολικός χώρος $P(U_1 \cap U_2)$ που έχει διάσταση 0 αφού $dim(U_1 \cap U_2) = 1$, αρά πρόκειται για ένα και μόνο σημείο. Συνεπώς οι προβολικές ευθείες $P(U_1)$ και $P(U_2)$ τέμνονται. $\square$

Παρατήρηση 1: Η παραπάνω πρόταση δείχνει πως στην προβολική γεωμετρία *δεν* ισχύει το περίφημο *αίτημα του Ευκλείδη* που λέει πως από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε μόνο μια ευθεία παράλληλη με την αρχική. Στην προβολική γεωμετρία από ένα σημείο εκτός ευθείας δεν υπάρχει *καμία* παράλληλη ευθεία προς την αρχική. Περισσότερα επ' αυτού (μαζί με διάφορα ιστορικά στοιχεία) αναγράφονται στην τελευταία παράγραφο 16.

Παρατήρηση 2: Ίσως ξενίζει αρχικά αλλά εάν σκεφτούμε με βάση την σχέση των διαστάσεων μεταξύ ενός διανυσματικού χώρου και του αντίστοι-

χου προβολικού χώρου, ο δεύτερος έχει διάσταση κατά ένα μικρότερη, η πρόταση 2 είναι περίπου προφανής: $dimP(V) = 2$, οπότε $dimV = 3$ και έστω $P(U_1)$ και $P(U_2)$ δύο διαφορετικές προβολικές ευθείες του $P(V)$, δηλαδή $dimP(U_1) = dimP(U_2) = 1$ οπότε $U_1, U_2 \leq V$ και $dimU_2 = dimU_2 = 2$. Η πρόταση 3.4.2 παραπάνω λέει πως οι διαφορετικές προβολικές ευθείες $P(U_1)$ και $P(U_2)$ οπωσδήποτε τέμνονται σε ένα σημείο έστω K του προβολικού επιπέδου. Εάν *μεταφράσουμε* την πρόταση αυτή στους αντίστοιχους διανυσματικούς χώρους και υποχώρους, θα πάρουμε ότι οι διανυσματικοί υπόχωροι του V διάστασης 2 ο καθένας U_1, U_2, αναγκαστικά τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας. Η τελευταία πρόταση είναι προφανής διότι εάν θεωρήσουμε πως ο διανυσματικός χώρος V διάστασης 3 είναι ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ (και άρα τους ταυτίζουμε), θεωρώντας ένα καρτεσιανό σύστημα συνταταγμένων με αρχή το σημείο O, οι διανυσματικοί υπόχωροι U_1, U_2 διάστασης 2 αποτελούν *επίπεδα του χώρου* $\mathbb{R}^3$ *που διέρχονται από την αρχή των αξόνων* O. Προφανώς αυτά τα επίπεδα τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας που περιέχει το O. Αυτή η ευθεία είναι το σημείο τομής K του προβολικού επιπέδου. Βλέπουμε πως με την χρήση της κατάλληλης (υψηλού επιπέδου και σύγχρονης) γλώσσας (θεωρία διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης), μια πρόταση που χρειάστηκαν αιώνες για να γίνει κατανοητή, είναι περίπου προφανής.

3.5 Ομογενείς και Ανομογενείς Συντεταγμένες

Είναι νομίζουμε αναγκαίο σε αυτό το σημείο να κατανοήσουμε καλύτερα τη σχέση μεταξύ ευθειών και επιπέδων στον προβολικό χώρο με τις γνωστές μας ευθείες και τα επίπεδα στο φυσικό 3-διάστατο χώρο. Θα εξετάσουμε πρώτα τη γενική περίπτωση ενός τυχαίου διανυσματικού χώρου V διάστασης $dimV = n + 1$ και στη συνέχεια θα δούμε την ειδική περίπτωση όπου $V = \mathbb{R}^3$ (που ταυτίζεται με το φυσικό 3-διάστατο χώρο).

Επιλέγουμε μια βάση $\{v_0, v_1, v_2, ..., v_n\}$ του V. Κάθε διάνυσμα $v \in V$ έχει συντεταγμένες $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ όπου

$$v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \tag{3}$$

Τα αντιπροσωπευτικά διανύσματα των σημείων του προβολικού χώρου $P(V)$ είναι αυτά των οποίων όλες οι συντεταγμένες δεν είναι μηδέν ($V \ni v \neq 0$). Επειδή ο προβολικός χώρος $P(V)$ με $dimP(V) = n$ αποτελεί πολλαπλότητα, δηλαδή χώρο που τοπικά μοιάζει με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, μπορούμε, τουλάχιστον τοπικά, να αναπαριστούμε τα σημεία του με ένα σύνολο συντεταγμένων (που δεν είναι όλες μηδέν), έχοντας υπ' όψιν ότι αν $\lambda \neq 0$, τότε κάθε

σύνολο συντεταγμένων της μορφής $(\lambda\lambda_0, \lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, ..., \lambda\lambda_n)$ αναπαριστά το *ίδιο* σημείο που αναπαριστά και το σύνολο των συντεταγμένων $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Με άλλα λόγια ισχύει ότι

$$[\lambda\lambda_0, \lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, ..., \lambda\lambda_n] = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n].$$

Οι συντεταγμένες αυτές ονομάζονται *ομογενείς συντεταγμένες*. Δηλαδή οι ομογενείς συντεταγμένες αναπαριστούν σημεία του $P(V)$ χρησιμοποιώντας όμως ουσιαστικά τις συντεταγμένες των αντιπροσωπευτικών διανυσμάτων του V.

Θεωρούμε τώρα τα σημεία $x \in P(V)$ που αναπαριστώνται από τις ομογενείς συντεταγμένες $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ με $\lambda_0 \neq 0$. Ας καλέσουμε το πλήθος όλων αυτών των σημείων U_0. Κάθε τέτοιο σημείο καθορίζεται σαφώς *και* από τις συντεταγμένες $(1, \lambda_1/\lambda_0, \lambda_2/\lambda_0, ..., \lambda_n/\lambda_0)$, δηλαδή από *n-ως προς το πλήθος* συντεταγμένες $(x_1, x_2, ..., x_n)$, όπου θέσαμε

$$x_i := \frac{\lambda_i}{\lambda_0}.$$

Οι συντεταγμένες αυτές ονομάζονται *ανομογενείς συντεταγμένες* του προβολικού χώρου $P(V)$. Προφανώς λοιπόν

$$U_0 \simeq \mathbb{R}^n,$$

από την οποία σχέση προκύπτει ότι ένα μεγάλο μέρος του προβολικού χώρου $P(V) = P(\mathbb{R}^{n+1})$ διάστασης n αποτελείται από τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$.

Τα σημεία συνεπώς του προβολικού χώρου $P(V)$ που δεν έχουμε συμπεριλάβει μέχρι στιγμής είναι αυτά για τα οποία $\lambda_0 = 0$. Όμως αυτά συνιστούν τους μονοδιάστατους διανυσματικούς υποχώρους του διανυσματικού χώρου διάστασης n που παράγεται από τα διανύσματα $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, συνεπώς αποτελούν τον προβολικό χώρο $P(\mathbb{R}^n)$, με διάσταση $n-1$, κατά 1 μικρότερη από την διάσταση του $P(V) = P(\mathbb{R}^{n+1})$. Συνεπώς αποδείξαμε πως

Πρόταση 1: $P(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}^n \coprod P(\mathbb{R}^n)$,

όπου το σύμβολο $\coprod$ δηλώνει την *ξένη ένωση* (disoint union) μεταξύ των συνόλων (δηλαδή ένωση μεταξύ συνόλων που δεν έχουν κοινά σημεία).

3.6 Παραδείγματα Προβολικών Χώρων

Ας δούμε κάποια παραδείγματα πραγματικών και μιγαδικών προβολικών χώρων στις διάφορες διαστάσεις.

◇ **1.** $dim_{\mathbb{R}}V = 1$

Έστω ότι ο πραγματικός διανυσματικός χώρος V έχει διάσταση 1. Τότε ο V είναι ισόμορφος με το $\mathbb{R}$, δηλαδή $V \cong \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει πως ο αντίστοιχος προβολικός χώρος θα έχει $dimP(\mathbb{R}) = 0$. Για να δούμε τι σημαίνει αυτό: είπαμε πως ο προβολικός χώρος ορίζεται ως το σύνολο των μονοδιάστατων διανυσματικών υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου, συνεπώς ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R})$ θα αποτελείται από τους μονοδιάστατους διανυσματικούς υποχώρους του $\mathbb{R}$. Όμως το $\mathbb{R}$ έχει διάσταση 1, συνεπώς έχει μόνο *ένα* μονοδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο, τον εαυτό του. Άρα το $P(\mathbb{R}) \simeq *$, δηλαδή ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R})$ αποτελείται από *ένα και μοναδικό σημείο* που το συμβολίζουμε όπως στην τοπολογία με $*$. Η διάσταση αυτού του χώρου είναι πράγματι 0.

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τη γεωμετρική εικόνα: αφού $V \cong \mathbb{R}$, χρησιμοποιούμε τη γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathbb{R}$ ως μια ευθεία, λόγου χάριν τον άξονα των τετμημένων $x'x$ του επιπέδου (ή του χώρου), πάνω στην οποία έχουμε ορίσει ένα τυχαίο σημείο ως αρχή O. Ο προβολικός χώρος ορίζεται ως το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από την αρχή O αλλά που είναι ταυτόχρονα και υπόχωροι του εν λόγω διανυσματικού χώρου, δηλαδή της ίδιας της ευθείας. Προφανώς μόνο μια ευθεία υπάρχει με αυτές τις ιδιότητες, ο άξονας $x'x$ ο ίδιος, συνεπώς ο προβολικός χώρος αποτελείται από ένα και μόνο σημείο.

◇ **2.** $dim_{\mathbb{R}}V = 2$

Κάθε πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης δύο είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση $V \cong \mathbb{R}^2$ ενώ $dimP(\mathbb{R}^2) = 1$. Ας προσπαθήσουμε να περιγράψουμε αυτόν το χώρο. Κατ' αρχήν εφοδιάζουμε το επίπεδο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων με αρχή το σημείο O. Ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^2)$ αποτελείται από το σύνολο των μονοδιάστατων διανυσματικών υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$. Γεωμετρικά, ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^2)$ ταυτίζεται τόσο με το χώρο των ευθειών του επιπέδου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O, όσο και με το χώρο των *διευθύνσεων στο επίπεδο*. Ως γνωστόν, κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο O προσδιορίζεται μονοσήμαντα από *μια* παράμετρο, τη *γωνία* που αυτή σχηματίζει, για παράδειγμα, με τον άξονα των τετμημένων $x'x$. Αν μετράμε τις γωνίες σε ακτίνια, η γωνία θα παίρνει τις τιμές στο κλειστό διάστημα $[0, \pi]$. Όμως η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 0, που είναι ο ίδιος ο άξονας $x'x$, *ταυτίζεται* με την ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία π, που είναι και πάλι ο άξονας $x'x$. Αν στο κλειστό διάστημα $[0, \pi]$, που τοπολογικά είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, ταυτίσουμε τα άκρα του, $0 \sim \pi$, τότε το ευθύγραμμο αυτό τμήμα θα 'κλείσει' και θα σχηματισθεί ένας *κύκλος*. Συνεπώς τοπολογικά ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^2)$ είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο,

γεγονός που το συμβολίζουμε $P(\mathbb{R}^2) \simeq S^1$.

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να δει το παραπάνω χρησιμοποιώντας συντεταγμένες: έστω (x, y) οι Καρτεσιανές Συντεταγμένες του επιπέδου που ταυτίζεται με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ και παίζουν το ρόλο των ομογενών συντεταγμένων του προβολικού χώρου $P(\mathbb{R}^2)$. Υπενθυμίζουμε ότι $dimP(\mathbb{R}^2) = 1$. Επιλέγουμε $x \neq 0$ και θεωρούμε τις ανομογενείς συντεταγμένες $(1, \lambda)$ στον $P(\mathbb{R}^2)$, όπου θέσαμε $\lambda := y/x$. Τα σημεία με (ανομογενείς) καρτεσιανές συντεταγμένες $(1, \lambda)$ αναπαριστούν μέσα στο επίπεδο την ευθεία $x = 1$, μια ευθεία παράλληλη με τον άξονα $y'y$ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με συντεταγμένες $(1, 0)$. Η ευθεία $x = 1$ τοπολογικά είναι ομοιομορφική με το $\mathbb{R}$, συνεπώς ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^2)$ θα περιέχει ένα αντίγραφο του $\mathbb{R}$, δηλαδή $\mathbb{R} \subset P(\mathbb{R}^2)$. Δεν τελειώσαμε όμως, διότι θα πρέπει μέσα στον προβολικό χώρο να συμπεριλάβουμε και τα σημεία με ομογενείς συντεταγμένες $(0, y)$. Τα σημεία αυτά αναπαριστούν τον άξονα $y'y$ του επιπέδου που τοπολογικά είναι επίσης ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}$. Όμως ολόκληρος ο άξονας $y'y$ στον προβολικό χώρο θα δώσει ένα και μόνο σημείο, αυτό με ομογενείς συντεταγμένες $(0, y)$, διότι όπως είδαμε $P(\mathbb{R}) \simeq *$. Συνεπώς ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^2)$ θα είναι (εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.5.1):

$$P(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R} \coprod P(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \coprod \{*\} \simeq S^1.$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει διότι από την τοπολογία γνωρίζουμε πως ο κύκλος αποτελεί τη *συμπαγοποίηση ενός σημείου* της ευθείας. Ο απλούστερος τρόπος για να το δει αυτό κάποιος που δεν είναι εξοικειωμένος με την τοπολογία είναι να σκεφθεί ως εξής: Θεωρούμε μια ευθεία και πάνω σε αυτήν επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο O. Θεωρούμε έναν κύκλο S^1 τυχαίας ακτίνας και κέντρου έστω K που να εφάπτεται στην ευθεία στο σημείο O. Έστω O' το αντιδιαμετρικό σημείο του O στον κύκλο. Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση 1-1 και επί μεταξύ των συνόλων $S^1 - \{O'\} \to \mathbb{R}$ ως εξής: έστω τυχαίο σημείο S του κύκλου (διαφορετικό από το O'). Φέρουμε τη χορδή $O'S$ του κύκλου και την προεκτείνουμε ώσπου να τμήσει την ευθεία. Η $O'S$ θα τμήσει την ευθεία σε ένα και μόνο σημείο, έστω E. Αντίστροφα, αν E ένα τυχαίο σημείο της ευθείας, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $O'E$ θα τμήσει τον κύκλο σε ένα και μόνο σημείο, έστω S. Καταλαβαίνει κανείς πως το μόνο σημείο του κύκλου που δεν έχει εικόνα στην ευθεία κατά την παραπάνω απεικόνιση είναι το ίδιο το O' διότι η ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο O' είναι παράλληλη με την ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο O αφού τα σημεία O και O' είναι αντιδιαμετρικά σημεία. (Η εικόνα του σημείου O κατά την παραπάνω απεικόνιση είναι το ίδιο το σημείο O μιας και το O ανήκει και στον κύκλο και στην ευθεία). Συνεπώς λέμε πως ο κύκλος προκύπτει από την ευθεία με την

προσθήκη ενός *επ΄ άπειρον σημείου*, που είναι το σημείο O', ή ισοδύναμα στην τοπολογία λέμε ότι ο κύκλος είναι η συμπαγοποίηση ενός σημείου της ευθείας. Το παραπάνω είναι κατ΄ αναλογία με τη γνωστή *στερεογραφική προβολή* μεταξύ του επιπέδου και της 2-διάστατης σφαίρας, μόνο που εδώ έχουμε μια διάσταση λιγότερη. Συνεπώς *η πραγματική προβολική ευθεία τοπολογικά αποτελεί κύκλο* S^1 (σφαίρα διάστασης 1).

Παρατήρηση 1: Ο υποψιασμένος αναγνώστης κατανοεί από το παραπάνω παράδειγμα το βαθύ τοπολογικό νόημα της *αλγεβρικής* πρότασης 3.4.2 περί της μη ύπαρξης παραλληλίας στον προβολικό χώρο.

◇ **3.** $dim_{\mathbb{R}}V = 3$

Κάθε πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης τρία είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση $V \cong \mathbb{R}^3$ ενώ $dimP(\mathbb{R}^3) = 2$. Ας προσπαθήσουμε να περιγράψουμε αυτόν το χώρο (πραγματικό προβολικό επίπεδο):

Εφοδιάζουμε το φυσικό 3-διάστατο χώρο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων με αρχή το σημείο O. Με βάση τη σημείωση 3.2.1 τα σημεία του φυσικού 3-διάστατου χώρου μπορούν να ταυτιστούν με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου. Ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^3)$ αποτελείται από το σύνολο των μονοδιάστατων διανυσματικών υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Γεωμετρικά ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^3)$ ταυτίζεται με το χώρο των ευθειών του φυσικού 3-διάστατου χώρου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O, ο οποίος επίσης ταυτίζεται με το χώρο των *διευθύνσεων στο χώρο*. Ως γνωστόν, κάθε ευθεία του χώρου που διέρχεται από το σημείο O προσδιορίζεται μονοσήμαντα από *δύο* παραμέτρους, για παράδειγμα τις *γωνίες* που αυτή σχηματίζει με οποιουσδήποτε δύο από τους τρεις άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων. Αν μετράμε τις γωνίες σε ακτίνια, η κάθε γωνία θα παίρνει τις τιμές στο κλειστό διάστημα $[0, \pi]$, συνεπώς ο χώρος των διευθύνσεων θα προέλθει από το *χώρο των παραμέτρων* που δίδεται από το καρτεσιανό γινόμενο $[0, \pi] \times [0, \pi]$. Ο χώρος των παραμέτρων $[0, \pi] \times [0, \pi]$ τοπολογικά αναπαριστά ένα τετράγωνο.

Όμως οι διευθύνσεις του χώρου που αντιστοιχούν στο *σύνορο* (περίμετρο) του τετραγώνου *ταυτίζονται* (κατ΄ αναλογία με αυτό που συνέβη στην περίπτωση της διάστασης 2 του αμέσως προηγούμενου παραδείγματος στα συνοριακά σημεία 0 και π του κλειστού διαστήματος $[0, \pi]$). Εδώ όμως τα πράγματα με τις ταυτίσεις των διευθύνσεων στον 3-διάστατο φυσικό χώρο είναι πιο πολύπλοκα: Κατ΄ αρχήν εφοδιάζουμε το τετράγωνο (χώρος των παραμέτρων) με ένα νέο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων (x, y) με αρχή μια κορυφή του τετραγώνου. Ως προς αυτό το νέο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων λοιπόν, έστω

ότι οι κορυφές του τετραγώνου έχουν συντεταγμένες $(0,0),(\pi,0),(\pi,\pi)$ και $(0,\pi)$. Κατόπιν θα πρέπει να ταυτιστούν τα σημεία των δύο οριζόντιων πλευρών του τετραγώνου μεταξύ τους ως εξής: $(x,0) \sim (\pi - x, \pi)$, με $x \in [0,\pi]$. Ταυτόχρονα όμως θα πρέπει να ταυτιστούν και τα σημεία των κάθετων πλευρών του τετραγώνου μεταξύ τους ως εξής: $(0,y) \sim (\pi, \pi - y)$, με $y \in [0,\pi]$.

Δηλαδή *ταυτίζουμε τις απέναντι πλευρές του τετραγώνου ανά δύο κάνοντας ταυτόχρονα κάθε φορά για κάθε ζευγάρι και μια τοπολογική στροφή* (topological twist).

Αυτή η επιφάνεια που προκύπτει ονομάζεται *επιφάνεια Boy*. Είναι μια λεία πολλαπλότητα με διάσταση 2, συμπαγής, πολλαπλά συνεκτική και *μη-προσανατολίσιμη*. Η επιφάνεια αυτή δεν μπορεί να *εμφυτευθεί* (embedded) στον 3-διάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$, μπορεί μόνο να *εμβαπτισθεί* (immersed) στον 3-διάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ (οι ορισμοί των εννοιών αυτών της τοπολογίας/γεωμετρίας υπάρχουν στο Παράρτημα, στην παράγραφο 17 στο τέλος). Όπως θα δούμε στο μάθημα της Διαφορικής Γεωμετρίας στο σχετικό κεφάλαιο όπου θα μελετήσουμε την τοπολογία των επιφανειών, η παραπάνω περιγραφή μέσω του χώρου των παραμέτρων μας δίδει ένα *επίπεδο μοντέλο* για την περιγραφή της επιφάνειας Boy που αποτελεί μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια με $k = 1$ (μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια με *ένα* cross cap, *σταυρωτό σκούφο*).

Θα εξηγήσουμε στη συνέχεια γιατί χρειάζεται η τοπολογική στροφή. Για να φανεί αυτό καθαρά ακολουθούμε διαφορετικό τρόπο σκέψης: χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες και χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού αυτό δεν επηρεάζει την τοπολογία, για να βρούμε το χώρο των διευθύνσεων του 3-διάστατου φυσικού χώρου, αντί να θεωρήσουμε το χώρο των ευθειών του 3-διάστατου χώρου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O, θεωρούμε το χώρο των ευθύγραμμων τμημάτων μήκους 2 (ως προς κάποια μονάδα μέτρησης) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O, όπου το σημείο O είναι στο μέσον όλων αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων. Φανερά, τα άκρα όλων αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων σχηματίζουν μια μοναδιαία σφαίρα S^2 διάστασης 2 με κέντρο το O. Ο χώρος των διευθύνσεων δεν είναι αυτή η μοναδιαία σφαίρα διότι κάθε διεύθυνση (δηλαδή κάθε ευθύγραμμο τμήμα) συνεισφέρει δύο σημεία (τα δύο άκρα του) στο σχηματισμό αυτής της σφαίρας ενώ εμείς θέλουμε ένα σημείο από κάθε διεύθυνση. Άρα θα πρέπει να διαιρέσουμε αυτή την 2-διάστατη σφαίρα δια δύο, δηλαδή πρέπει να πάρουμε μόνο το ένα ημισφαίριο μαζί με τον ισημερινό κύκλο που θα είναι το σύνορό της. Και πάλι όμως δεν τελειώσαμε διότι τα σημεία του ισημερινού κύκλου (που αντιστοιχούν στα ευθύγραμμα τμήματα που περνούν από το κέντρο O και βρίσκονται πάνω στο επίπεδο του ισημερινού) θα πρέπει εκ νέου να διαιρεθούν δια δύο διότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα του ισημερινού δίσκου

συνεισφέρει δύο σημεία (που είναι τα άκρα του) στον ισημερινό κύκλο. Αυτή η διαίρεση όμως τώρα πρέπει να γίνει *ταυτίζοντας τα αντιδιαμετρικά σημεία* του ισημερινού κύκλου. Από αυτήν ακριβώς την ταύτιση προκύπτει η τοπολογική στροφή. Το αποτέλεσμα είναι και πάλι μια επιφάνεια Boy. Συνεπώς *το πραγματικό προβολικό επίπεδο τοπολογικά αποτελεί μια επιφάνεια Boy.*

Το μοντέλο του προβολικού επιπέδου ως σφαίρα με ταύτιση των αντιδιαμετρικών σημείων της διαφωτίζει περισσότερο την Πρόταση 3.4.2: μια προβολική ευθεία του προβολικού επιπέδου ορίζεται μέσω ενός διανυσματικού υποχώρου του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 ο οποίος γεωμετρικά παριστά ένα επίπεδο. Το επίπεδο αυτό τέμνει την μοναδιαία σφαίρα κατά έναν μέγιστο κύκλο. Δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία. Όταν ταυτίσουμε αντιδιαμετρικά σημεία θα πάρουμε ένα σημείο τομής.

Ας δούμε την σχέση μεταξύ προβολικών ευθειών και κανονικών ευθειών του επιπέδου χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.5.1:

$$P(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^2 \coprod P(\mathbb{R}^2),$$

απ' όπου προκύπτει πως το πραγματικό προβολικό επίπεδο γράφεται ως ξένη ένωση του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ με την προβολική ευθεία $P(\mathbb{R}^2)$. Θυμίζουμε πως αυτή η προβολική ευθεία περιγράφεται με χρήση ομογενών συντεταγμένων με την σχέση $\lambda_0 = 0$, συνεπώς αντιστοιχεί στον διανυσματικό υπόχωρο διάστασης 2 που παράγεται από τα διανύσματα $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$. Κάθε υπόχωρος διάστασης 2 του $\mathbb{R}^3$ ορίζεται απο την εξίσωση

$$a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0$$

και εάν τα a_0, a_1 δεν είναι και τα δύο μηδέν, ο υπόχωρος αυτός τέμνει το σύνολο $U_0 \simeq \mathbb{R}^2$ (τα σημεία $\lambda_0 \neq 0$) όπου

$$0 = a_0 + a_1\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + a_2\frac{\lambda_2}{\lambda_0} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2,$$

που αποτελεί μια κανονική ευθεία του επιπέδου με συντεταγμένες x_1, x_2. Η προβολική ευθεία έχει ένα επιπλέον σημείο, αυτό με $\lambda_0 = 0$, δηλαδή το σημείο $[0, a_2, -a_1]$. Αντίστροφα, κάθε κανονική ευθεία του $\mathbb{R}^2$ επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μια προβολική ευθεία του προβολικού επιπέδου.

Δύο ευθείες του $\mathbb{R}^2$ είναι παράλληλες εάν είναι της μορφής

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

$$b_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

αλλά τότε το επ΄ άπειρον σημείο που τις καθιστά προβολικές ευθείες είναι κοινό: $[0, a_2, -a_1]$, συνεπώς οι δύο ευθείες τέμνονται σε κοινό σημείο πάνω στην επ΄ άπειρον ευθεία $P(\mathbb{R}^2)$.

Για λόγους πληρότητας θα αναφέρουμε και μια παραμετρική παράσταση της επιφάνειας Boy στο χώρο $\mathbb{R}^3$, τη λεγόμενη *παραμέτρηση Bryant*. Δοθέντος ενός μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}$, με $|z| \leq 1$, (όπου $|z|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z, βλέπε και την επόμενη παράγραφο με την στερεογραφική προβολή), θέτουμε:

$$g_1 = -\frac{3}{2} Im[\frac{z(1-z^4)}{z^6 + \sqrt{5}z^3 - 1}],$$

$$g_2 = -\frac{3}{2} Re[\frac{z(1+z^4)}{z^6 + \sqrt{5}z^3 - 1}],$$

$$g_3 = Im(\frac{1+z^6}{z^6 + \sqrt{5}z^3 - 1}) - \frac{1}{2},$$

$$g = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2,$$

(όπου Im και Re συμβολίζουν το φανταστικό και το πραγματικό μέρος αντίστοιχα των μιγαδικών αριθμών), έτσι ώστε

$$x = \frac{g_1}{g},$$

$$y = \frac{g_2}{g},$$

$$z = \frac{g_3}{g},$$

να είναι οι Καρτεσιανές Συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου της επιφάνειας Boy στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Η συγκεκριμένη παραμετρική παράσταση δίδει μια εκπεφρασμένη *εμβάπτιση* της επιφάνειας Boy στον χώρο $\mathbb{R}^3$, μέσω της απεικόνισης $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$, που ορίσαμε παραπάνω, όπου D είναι ο μοναδιαίος δίσκος $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ του επιπέδου Argand. Σημειώνουμε πως σε συμφωνία με όσα είπαμε πιο πάνω, αυτή η απεικόνιση *δεν* αποτελεί εμφύτευση διότι αποτελεί μόνο *τοπικό* ομοιομορφισμό επειδή η απεικόνιση δεν είναι 1-1.

$\diamond$ **4.** Έστω $V = \mathbb{R}^4$. Τότε αφού $dimP(\mathbb{R}^4) = 3$, τα σημεία αυτού θα αναπαρίστανται από τις ανομογενείς συντεταγμένες $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Μια (προβολική) ευθεία στον $P(\mathbb{R}^4)$ αποτελείται από το σύνολο των μη-μηδενικών διανυσμάτων

με ομογενείς συντεταγμένες $a(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)+b(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $\lambda_0, \mu_0 \neq 0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανομογενείς συντεταγμένες

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$$

και

$$y_i = \frac{\mu_i}{\mu_0},$$

όπου $i = 1, 2, 3$, οπότε η προβολική ευθεία είναι το σύνολο των μη-μηδενικών διανυσμάτων του $\mathbb{R}^4$ με ανομογενείς συντεταγμένες $(a + b, ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3)$ η οποία σε ανομογενείς συντεταγμένες αποτελείται από διανύσματα της μορφής

$$(\frac{a}{a+b})\vec{x} + (\frac{b}{a+b})\vec{y} = \vec{x} + \frac{b}{a+b}(\vec{y} - \vec{x}).$$

Η παραπάνω σχέση για $a, b \in \mathbb{R}$ δίδει την εξίσωση ευθείας μεταξύ των σημείων με διανύσματα θέσης $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Ένα προβολικό επίπεδο στον $P(\mathbb{R}^4)$ τέμνει τα σημεία με $\lambda_0 \neq 0$ σε ένα συνηθισμένο επίπεδο. Συνεπώς το σύνολο των σημείων $U_0 \subset P(\mathbb{R}^4)$ με $\lambda_0 \neq 0$ είναι ένα αντίγραφο του $\mathbb{R}^3$ όπου οι προβολικές ευθείες και τα προβολικά επίπεδα τέμνουν το X σε συνηθισμένες ευθείες και επίπεδα. Ο πλήρης 3-διάστατος χώρος $P(\mathbb{R}^4)$ αποκτάται αν συμπεριλάβουμε και τα σημεία με $\lambda_0 = 0$. Αφού τα αντιπροσωπευτικά διανύσματα $(0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ συνιστούν έναν 3-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$, ο αντίστοιχος προβολικός χώρος θα έχει διάσταση 2. Άρα $P(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^3 \coprod P(\mathbb{R}^3)$.

◇ **5.** $dim_{\mathbb{C}} V = 1$

Στην περίπτωση ενός μιγαδικού διανυσματικού χώρου διάστασης 1, προκύπτει άμεσα ότι $P(\mathbb{C}) \simeq *$.

◇ **6.** $dim_{\mathbb{C}} V = 2$

Στην περίπτωση ενός μιγαδικού διανυσματικού χώρου διάστασης 2, χρησιμοποιώντας τη στερεογραφική προβολή, προκύπτει ότι $P(\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{C} \coprod \{\infty\} \simeq S^2$. Εάν χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.5.1 θα πάρουμε ισοδύναμα $P(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{*\}$, που αποτελεί το μιγαδικό επίπεδο με την προσθήκη ενός επ΄ άπειρον σημείου, χώρος που τοπολογικά αποτελεί σφαίρα S^2 διάστασης 2. Συνεπώς *η μιγαδική προβολική ευθεία τοπολογικά αποτελεί σφαίρα διάστασης* 2. (Σημειώνουμε πως το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}^2$ έχει πραγματική διάσταση 4 ενώ η σφαίρα S^2 με πραγματική διάσταση 2 ως μιγαδική πολλαπλότητα έχει διάσταση 1).

Σχόλιο 1: Μια γενίκευση των προβολικών χώρων είναι η εξής: Δοθέντος ενός διανυσματικού χώρου V με κάποιο τυχαίο σώμα $\mathbb{F}$ και με $dimV = n$, μπορούμε γενικότερα να ορίσουμε το χώρο που συμβολίζεται $Gr_{n,k}(V)$, όπου οι n, k είναι φυσικοί αριθμοί $n, k \in \mathbb{N}$, με $1 \leq k \leq n$, ως το σύνολο των διανυσματικών υποχώρων διάστασης k του V. Οι χώροι αυτοί λέγονται *χώροι Grassmann* και αποτελούν και πάλι πολλαπλότητες διάστασης $k(n-k)$. Προφανώς αν $k = 1$ παίρνουμε τον προβολικό χώρο.

Σχόλιο 2: Μια από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις της (διαγνωστικής) Ιατρικής είναι αναμφίβολα αυτές του αξονικού και του μαγνητικού τομογράφου. Οι εφευρέτες τους τιμήθηκαν με το βραβείο Νομπέλ Ιατρικής το 1979 (G.N. Hounsfield-UK, A.M. Cormack-USA) και το 2003 (P. Mansfield-UK, P.C. Lauterbur-USA) αντίστοιχα. Όπως αναφέρει ο A.M. Cormack, το σημαντικότερο πρόβλημα που είχαν να αντιμετωπίσουν ήταν μαθηματικής φύσης, η εξεύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon. Χωρίς να αναφέρουμε λεπτομέρειες, ο μετασχηματισμός αυτός στις 2 διαστάσεις είναι ο ολοκληρωτικός μετασχηματισμός ενός (ολοκληρωτικού) πυρήνα στο χώρο των ευθειών του επιπέδου. Για παράδειγμα, εάν μια ευθεία αναπαρίσταται ως $x\cos\theta + y\sin\theta = s$, όπου s η απόσταση της ευθείας από την αρχή των αξόνων και θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $y'y$, τότε

$$R[f](\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy.$$

Στις 3 διαστάσεις είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός μιας συγκεκριμένης συνάρτησης (ολοκληρωτικός πυρήνας) στο χώρο των ευθειών του χώρου, δηλαδή το πεδίο ορισμού του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού είναι μια επιφάνεια Boy. Το πρόβλημα στην εξεύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon πηγάζει ακριβώς από το γεγονός ότι η επιφάνεια Boy, λόγω της τοπολογίας της, δεν μπορεί να εμφυτευθεί στον $\mathbb{R}^3$ αλλά μόνο να εμβαπτισθεί. Η επίλυση αυτής της δυσκολίας ουσιαστικά έφερε το βραβείο Νομπέλ Ιατρικής στους A.M. Cormack, G.N. Hounsfield.

3.7 Παράρτημα: Στερεογραφική Προβολή

Για ευκολία στον αναγνώστη, παραθέτουμε τα βασικά στοιχεία της *στερεογραφικής προβολής* του Riemann μεταξύ της 2-διάστατης σφαίρας και του επιπεδου Argand.

Θεωρούμε Καρτεσιανές Συντεταγμένες (x, y) στο επίπεδο (2 διαστάσεις) με άξονα τετμημένων τον $x'x$, άξονα τεταγμένων τον $y'y$ και αρχή το σημείο O.

Αν ταυτίσουμε τον άξονα των τετμημένων με τους πραγματικούς αριθμούς και τον άξονα των τεταγμένων με τους φανταστικούς αριθμούς, τότε κάθε σημείο έστω A του επιπέδου με συντεταγμένες $A(x, y)$ μπορεί να ταυτιστεί με το μιγαδικό αριθμό $\zeta = x + iy$, όπου i η φανταστική μονάδα, με $i^2 = -1$. Αντίστροφα, σε κάθε μιγαδικό αριθμό $\zeta \in \mathbb{C}$ μπορούμε να απεικονίσουμε ένα σημείο του επιπέδου A με τετμημένη το πραγματικό μέρος $\Re(\zeta)$ του ζ και τεταγμένη το φανταστικό μέρος $\Im(\zeta)$ του ζ, δηλαδή $A(\Re(\zeta), \Im(\zeta))$. Η παραπάνω απεικόνιση είναι 1-1, επί και συνεχής, συνεπώς το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι ομοιομορφικό με το επίπεδο (ως τοπολογικοί χώροι) ή ισοδύναμα το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}^2$ (ως διανυσματικοί χώροι με σώμα το $\mathbb{R}$). *Το γεωμετρικό επίπεδο όταν ταυτίζεται με το σύνολο των μιγαδικών αριθμών* $\mathbb{C}$ *όπως παραπάνω* (και όχι με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ που είδαμε πιο πριν), *λέγεται* επίπεδο Argand.

Θεωρούμε τώρα μια μοναδιαία σφαίρα δύο διαστάσεων S^2 και πάνω σε αυτή θεωρούμε τα σημεία B και N που αντιστοιχούν στο Βόρειο' και στο Νότιο' Πόλο της σφαίρας αντίστοιχα. Μπορούμε να ορίσουμε έναν *ομοιομορφισμό* μεταξύ του συνόλου $S^2 - \{B\}$ και του επιπέδου Argand, που λέγεται *στερεογραφική προβολή* του Riemann ως εξής: θεωρούμε ότι η σφαίρα εφάπτεται στο επίπεδο στο σημείο N, οπότε απεικονίζουμε το σημείο N της σφαίρας στο σημείο του επιπέδου όπου αυτή εφάπτεται. Κατόπιν, έστω A τυχαίο σημείο της σφαίρας (διαφορετικό από το B που έχει εξαιρεθεί και διαφορετικό και από το N για το οποίο μιλήσαμε ήδη). Αντιστοιχούμε το σημείο A της σφαίρας σε εκείνο το μοναδικό σημείο του επιπέδου που η προέκταση της ευθείας BA τέμνει το επίπεδο. Αντίστροφα, κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί στο μοναδικό σημείο της σφαίρας που η ευθεία PB τέμνει τη σφαίρα.

Ας δούμε τις αναλυτικές εκφράσεις των παραπάνω απεικονίσεων: έστω ότι έχουμε ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συνταταγμένων (x, y, z) στον 3-διάστατο χώρο (που τον ταυτίζουμε με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$), με αρχή το σημείο O. Έστω $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ η μοναδιαία σφαίρα 2-διαστάσεων εμφυτευμένη στον 3-διάστατο χώρο (που λέγεται *σφαίρα Riemann*). Θεωρούμε ότι η αρχή των αξόνων O ταυτίζεται με το κέντρο της μοναδιαίας σφαίρας οπότε ο βόρειος πόλος θα έχει συντεταγμένες $B(0, 0, 1)$. Ορίζουμε την απεικόνιση $p : S^2 - \{B\} \to \mathbb{C}$ με τύπο:

$$p(x, y, z) := \frac{x + iy}{1 - z}$$

Αποδεικνύεται ότι η p αποτελεί έναν ομοιομορφισμό (δηλαδή είναι 1-1, επί, συνεχής και η αντίστροφή της είναι επίσης συνεχής). Η αντίστροφη απεικόνιση

$p^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 - \{B\}(\subset \mathbb{R}^3)$ έχει αναλυτικό τύπο:

$$p^{-1}(\zeta) := (\frac{\zeta + i\overline{\zeta}}{1+|\zeta|^2}, \frac{\zeta - \overline{\zeta}}{i(1+|\zeta|^2)}, \frac{|\zeta|^2 - 1}{1+|\zeta|^2})$$

όπου $\overline{\zeta}$ ο συζυγής μιγαδικός του ζ και $|\zeta|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού ζ, δηλαδή αν $\zeta = x + iy$, τότε $\overline{\zeta} = x - iy$ και $|\zeta|^2 = \zeta\overline{\zeta} = x^2 + y^2$.

Σημειώνουμε τέλος πως αν χρησιμοποιήσουμε *σφαιρικές συντεταγμένες* (θ, ϕ) για να περιγράψουμε τη μοναδιαία σφαίρα, με $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ όπου $\theta \in [0, \pi]$ και $\phi \in [0, 2\pi]$, τότε η αναλυτική έκφραση της στερεογραφικής προβολής έχει τη μορφή

$$\zeta = e^{i\phi} cot(\frac{\theta}{2})$$

όπου ως γνωστόν $e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$.

4 Προβολικοί Μετασχηματισμοί

4.1 Βασικοί Ορισμοί

Ξεκινάμε με κάποια στοιχεία από τη γραμμική άλγεβρα:

Ορισμός 1. Έστω V και W δύο διανυσματικοί χώροι (πεπερασμένης διάστασης) με το ίδιο σώμα $\mathbb{F}$. Μια απεικόνιση $T : V \to W$ θα λέγεται *γραμμική απεικόνιση* (ή *γραμμικός μετασχηματισμός*) αν ισχύει το εξής:

$$T(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda T(v_1) + \mu T(v_2)$$

$\forall v_1, v_2 \in V$ και $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

Ο *πυρήνας* της T ορίζεται ως το σύνολο $Ker(T) := \{v \in V | Tv = 0\}$ ενώ η *εικόνα* της T ορίζεται ως το σύνολο $Im(T) := \{w \in W | w = Tv\}$.

Ισχύει η εξής βασική πρόταση από τη θεωρία των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης:

Πρόταση 1. Έστω $T : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση όπως παραπάνω. Τότε το σύνολο $Ker(T) \leq V$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του V, το σύνολο $Im(T) \leq W$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του W ενώ οι διαστάσεις τους ικανοποιούν τη σχέση

$$dim[Ker(T)] + dim[Im(T)] = dimV.$$

Εάν $Ker(T) = 0$, δηλαδή αν ο διανυσματικός υπόχωρος $Ker(T) \leq V$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, και αν $dimV = dimW$, τότε η γραμμική απεικόνιση T είναι *αντιστρέψιμη*, δηλαδή η T είναι 1-1 και επί, οπότε υπάρχει και η αντίστροφη γραμμική απεικόνιση $T^{-1} : W \to V$ που είναι επίσης 1-1 και επί.

Έστω $T : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση και έστω $v \in V$ κάποιο τυχαίο διάνυσμα. Συμβολίζουμε με $V_v \leq V$ το *μονοδιάστατο* διανυσματικό υπόχωρο του V που παράγεται από το διάνυσμα v. Θεωρούμε την εικόνα $T(V_v) \leq W$ του V_v μέσα στον W μέσω της T . Τότε αν $Tv \neq 0$, τότε το $T(V_v)$ αποτελεί το *μονοδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο* $W_{Tv} \leq W$ του W που παράγεται από το διάνυσμα $Tv \in W$. *Συνεπώς η T απεικονίζει τους μονοδιάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του V που παράγονται από τα διανύσματα του V που* **δεν** *ανήκουν στον πυρήνα της T, στους αντίστοιχους μονοδιάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του W*, συνεπώς ορίζει μια *νέα απεικόνιση*:

$$\tau : P(V) - P(KerT) \to P(W)$$

Αν η T είναι *αντιστρέψιμη*, τότε $KerT = 0$ οπότε η τ ορίζεται σε ολόκληρο τον προβολικό χώρο $P(V)$ και δίδει μια *αμφεικόνιση* (δηλαδή μια απεικόνιση που είναι 1-1 και επί):

$$\tau : P(V) \to P(W)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2. Ένας *προβολικός μετασχηματισμός* από τον προβολικό χώρο $P(V)$ στον προβολικό χώρο $P(W)$ είναι η απεικόνιση $\tau : P(V) \to P(W)$ που ορίζεται όπως περιγράψαμε πιο πάνω μέσω ενός αντιστρέψιμου γραμμικού μετασχηματισμού $T : V \to W$.

Πρόταση 2: Εάν $\lambda \neq 0$, και T αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός, τότε οι T και λT όπου $\lambda \in \mathbb{F}$, ορίζουν τον ίδιο προβολικό μετασχηματισμό τ. Ισχύει και το αντίστροφο.

Απόδειξη: Το ορθό είναι προφανές διότι από την γραμμικότητα της T έχουμε ότι

$$[(\lambda T)(v)] = [\lambda(T(v))] = [T(v)].$$

Για το αντίστροφο, έστω T και T' ορίζουν τον ίδιο προβολικό μετασχηματισμό τ. Θεωρούμε μια βάση $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ του V (έστω $\dim V = n+1$). Τότε αφού

$$\tau([v_i]) = [T'(v_i)] = [T(v_i)],$$

έχουμε ότι

$$T'(v_i) = \lambda_i T(v_i)$$

για κάποια μη-μηδενικά βαθμωτά λ_i και επίσης

$$T'(\sum_{i=0}^{n} v_i) = \lambda T(\sum_{i=0}^{n} v_i)$$

για κάποιο μη-μηδενικό λ. Όμως τότε

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda T(v_i) = \lambda T(\sum_{i=0}^{n} v_i) = T'(\sum_{i=0}^{n} v_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T(v_i).$$

Αφού η T είναι αντιστρέψιμη, τα $T(v_i)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κάτι που συνεπάγεται πως $\lambda_i = \lambda$. Τότε $T'(v_i) = \lambda T(v_i)$ για όλα τα διανύσματα της βάσης, άρα και για κάθε διάνυσμα του V, οπότε

$$T' = \lambda T.$$

Παραδείγματα:

1. *Μετασχηματισμοί Möbius στο επίπεδο Argand*, (ή *Μετασχηματισμοί Möbius στην μιγαδική προβολική ευθεία*), που γνωρίζουμε από την μιγαδική ανάλυση. Αυτοί είναι οι προβολικοί μετασχηματισμοί της μιγαδικής προβολικής ευθείας $P(\mathbb{C}^2)$ στον εαυτό της. Περιγράφουμε τα σημεία του $P(\mathbb{C}^2)$ μέσω των ομογενών συνταταγμένων $[z_0, z_1]$ οπότε ένας προβολικός μετασχηματισμός τ ορίζεται ως

$$\tau([z_0, z_1]) = [az_0 + bz_1, cz_0 + dz_1],$$

όπου $ad - bc \neq 0$. Ο μετασχηματισμός αυτός αντιστοιχεί στον αντιστρεπτό γραμμικό μετασχηματισμό

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

με μη-μηδενική ορίζουσα $detT \neq 0$. Γράφουμε την μιγαδική προβολική ευθεία ως $P(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπου το επ' άπειρον σημείο αντιστοιχεί στον μονοδιάστατο μιγαδικό διανυσματικό υπόχωρο $z_1 = 0$. Εάν $z_1 \neq 0$, τότε $[z_0, z_1] = [z, 1]$ και

$$\tau([z, 1]) = [az + b, cz + d]$$

και εάν $cz + d \neq 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\tau([z, 1]) = [\frac{az + b}{cz + d}, 1],$$

που αποτελεί την συνήθη γραφή των μετασχηματισμών Möbius που γνωρίζουμε από την μιγαδική ανάλυση

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Το πλεονέκτημα της προβολικής γεωμετρίας είναι ότι το σημείο $\infty = [1, 0]$ δεν παίζει ειδικό ρόλο: εάν $cz + d = 0$ μπορούμε ακόμη να γράψουμε

$$\tau([z, 1]) = [az + b, cz + d] = [az + b, 0] = [1, 0]$$

και εάν $z = \infty$ (δηλαδή $[z_0, z_1] = [1, 0]$), τότε έχουμε

$$\tau([1, 0]) = [a, c].$$

2. *Μετασχηματισμοί Möbius στην πραγματική προβολική ευθεία* $P(\mathbb{R}^2)$. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ο αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ έχει τύπο: $T(\lambda_0, \lambda_1) = (a\lambda_0 + b\lambda_1, c\lambda_0 + d\lambda_1)$, όπου (λ_0, λ_1) η αναπαράσταση ως προς τη συνήθη βάση ενός τυχαίου διανύσματος του $\mathbb{R}^2$, και όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $ad - bc \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την ανομογενή

συντεταγμένη $x := \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ παίρνουμε τον αντίστοιχο προβολικό μετασχηματισμό $\tau : P(\mathbb{R}^2) \to P(\mathbb{R}^2)$ με τύπο:

$$\tau(x) = \frac{a + bx}{c + dx}$$

που ονομάζεται *γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός* (ή πραγματικός μετασχηματισμός Möbius). Ο παραπάνω μετασχηματισμός εμφανίζεται συχνά στα μαθηματικά.

3. *Προβολικοί Μετασχηματισμοί του προβολικού επιπέδου* $P(\mathbb{R}^3)$. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ο αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ αναπαρίσταται με τη μορφή του παρακάτω 3×3 αντιστρέψιμου πίνακα:

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

με μη-μηδενική ορίζουσα $detT \neq 0$. Έστω $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ κάποιο σύστημα ομογενών συντεταγμένων του προβολικού επιπέδου $P(\mathbb{R}^3)$. Χρησιμοποιώντας τις ανομογενείς συντεταγμένες $x_1 := \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ και $x_2 := \frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ παίρνουμε τον αντίστοιχο προβολικό μετασχηματισμό $\tau : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$ με τύπο:

$$\tau(x_1, x_2) = (\frac{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2}{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}, \frac{c_0 + c_1x_1 + c_2x_2}{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}).$$

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι η εξής: γράφουμε το πραγματικό προβολικό επίπεδο ως

$$P(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2 \cup P(\mathbb{R}^2),$$

όπου η πραγματική επ΄ άπειρον προβολική ευθεία είναι η $x_0 = 0$. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γράφεται και πάλι ως

$$T = \begin{pmatrix} d & b_1 & b_2 \\ c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

και η δράση του στο σημείο $[1, x, y]$ γράφεται ως

$$\vec{v} \mapsto \frac{1}{\vec{b} \cdot \vec{v} + d}(A\vec{v} + \vec{c}),$$

όπου $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, A είναι ο 2×2 υποπίνακας a_{ij} του T και $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Αυτοί είναι οι μετασχηματισμοί Möbius στο πραγματικό

προβολικό επίπεδο (μερικές φορές αναφέρονται και ως μετασχηματισμοί Möbius στις 2 διαστάσεις). Αποτελούνται από την σύνθεση τριών επι μέρους μετασχηματισμών: ενός αντιστρέψιμου γραμμικού μετασχηματισμού $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$, μιας μετατώπισης $\vec{v} \mapsto \vec{v} + \vec{c}$ και μιας αντιστροφής $\vec{v} \mapsto \vec{v}/(\vec{b} \cdot \vec{v} + d)$.

4. Ένα πιο γεωμετρικό ίσως παράδειγμα ενός προβολικού μετασχηματισμού είναι το εξής: θεωρούμε δύο προβολικές ευθείες $P(U), P(U')$ στο προβολικό επίπεδο $P(V)$ και έστω $K \in P(V)$ ένα σημείο εκτός των προβολικών ευθειών. Για κάθε σημείο $x \in P(U)$, η μοναδική προβολική ευθεία που ενώνει το K με το x τέμνει την $P(U')$ σε μοναδικό σημείο $X = \tau(x)$. Τότε

$$\tau : P(U) \to P(U')$$

αποτελεί έναν προβολικό μετασχηματισμό. Ας δούμε γιατί: έστω W ο μονοδιάστατος υπόχωρος του V που ορίζεται από το $K \in P(V)$. Τότε αφού το K δεν βρίσκεται στην προβολική ευθεία $P(U')$, $W \cap U' = 0$, που σημαίνει ότι

$$V = W \oplus U'.$$

Έστω $a \in U$ ένα αντιπροσωπευτικό διάνυσμα για το σημείο x. Τότε αυτό θα γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $a = w + a'$, όπου $w \in W, a' \in U'$. Η προβολική ευθεία που ενώνει το K και το x ορίζεται από τον υπόχωρο διάστασης 2 που παράγεται από τα w, a, οπότε το $a' = a - w$ αποτελεί αντιπροσωπευτικό διάνυσμα για το σημείο $\tau(x)$. Με όρους γραμμικής άλγεβρας, η απεικόνιση $a \mapsto a'$ είναι η γραμμική προβολική απεικόνιση $P : V \to U'$ περιορισμένη στο U η οποία έχει μηδενικό πυρήνα αφού το K βρίσκεται και εκτός της $P(U)$, οπότε $W \cap U = 0$. Συνεπώς η $T : U \to U'$ αποτελεί ισομορφισμό οπότε η τ αποτελεί προβολικό μετασηματισμό (σχήμα περιορισμού στο επίπεδο).

4.2 Σημεία σε Γενική Θέση

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης n καθορίζεται από την δράση του πάνω σε n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Κάτι αντίστοιχο ισχύει στους προβολικούς χώρους, το αντίστοιχο της γραμμικής ανεξαρτησίας είναι η έννοια των σημείων σε γενική θέση:

Ορισμός 1. Έστω $P(V)$ πραγματικός προβολικός χώρος με $dimP(V) = n$ (άρα $dimV = n + 1$). Ένα σύνολο από κάποια $(n + 2)$-ως προς το πλήθος σημεία του $P(V)$ θα λέμε ότι *βρίσκονται σε γενική θέση* αν κάθε υποσύνολο αποτελούμενο από $(n + 1)$-ως προς το πλήθος σημεία εξ αυτών έχουν αντιπροσωπευτικά διανύσματα που είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παραδείγματα:

1. Κάθε τριάδα διαφορετικών μεταξύ τους σημείων της προβολικής ευθείας $P(\mathbb{R}^2)$ βρίσκονται σε γενική θέση. Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι η εξής: Έστω ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή έστω (x_1, x_2, x_3) μια τριάδα διαφορετικών μεταξύ τους σημείων της προβολικής ευθείας που δε βρίσκονται σε γενική θέση (όπου κάθε σημείο αναπαρίσταται μέσω της αντίστοιχης ανομογενούς συντεταγμένης του). Τότε δύο εξ αυτών, για παράδειγμα αυτά με ανομογενείς συντεταγμένες x_1 και x_2, θα έχουν αντιπροσωπευτικά διανύσματα v_1 και v_2 αντίστοιχα που είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή το ένα θα είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου, έστω $v_1 = \lambda v_2$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε όμως τα v_1 και v_2 θα βρίσκονται στον ίδιο μονοδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ οπότε στον προβολικό χώρο $P(\mathbb{R}^2)$ θα πρέπει να αναπαριστούν το ίδιο σημείο, άτοπο, διότι εξ αρχής υποθέσαμε ότι τα τρία σημεία είναι μεταξύ τους όλα διαφορετικά.

2. Κάθε τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του προβολικού επιπέδου $P(\mathbb{R}^3)$ βρίσκονται σε γενική θέση αν καμιά τριάδα εξ αυτών δεν είναι συνευθειακά σημεία, δηλαδή τα σημεία δεν βρίσκονται στην ίδια προβολική ευθεία του προβολικού επιπέδου. (Απόδειξη ανάλογη με το παραπάνω παράδειγμα).

Η χρησιμότητα του παραπάνω ορισμού συνίσταται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1. *Έστω $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$ ένα σύνολο από $(n+2)$-ως προς το πλήθος σημεία ενός πραγματικού προβολικού χώρου $P(V)$ με $dimP(V) = n$ (και άρα $dimV = n+1$) που βρίσκονται σε γενική θέση. Έστω επίσης $y_0, y_1, ..., y_{n+1}$ ένα σύνολο από $(n+2)$-ως προς το πλήθος σημεία ενός άλλου πραγματικού προβολικού χώρου $P(W)$ με $dimP(W) = n$ (και άρα $dimW = n+1$) που βρίσκονται επίσης σε γενική θέση. Τότε υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός $\tau : P(V) \to P(W)$ με*

$$\tau(x_i) = y_i$$

για όλα τα $i = 0, 1, ..., n+1$.

Απόδειξη: Έστω $v_i \in V$, τα αντίστοιχα αντιπροσωπευτικά διανύσματα των σημείων $x_i \in P(V)$, όπου ο δείκτης i παίρνει τις τιμές $i = 0, 1, ..., n+1$. Επειδή τα $(n+2)$-ως προς το πλήθος σημεία αυτά βρίσκονται σε γενική θέση, από τον ορισμό έπεται ότι οποιαδήποτε $(n+1)$-ως προς το πλήθος σημεία εξ αυτών θα έχουν αντίστοιχα αντιπροσωπευτικά διανύσματα που είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Για παράδειγμα επιλέγουμε τα γραμμικά ανεξάρτητα αντιπροσωπευτικά διανύσματα v_0,v_1,...,v_n. Αυτά τα $(n+1)$-ως προς το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα όμως αποτελούν μια βάση για το διανυσματικό χώρο

V διότι αφ' ενός είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφ' ετέρου είναι σε πλήθος τόσα όσα και η διάσταση του V. Άρα κάθε διάνυσμα του V, συνεπώς και το αντιπροσωπευτικό διάνυσμα v_{n+1}, θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης, δηλαδή θα έχουμε

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$$

για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Στην παραπάνω σχέση θα πρέπει $\lambda_i \neq 0$ για όλα τα $i = 0, 1, ..., n$ διότι στην αντίθετη περίπτωση που θα είχαμε $\lambda_i = 0$ για κάποιο $i = k$, τότε θα είχαμε το εν λόγω αντιπροσωπευτικό διάνυσμα v_k ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων αντιπροσωπευτικών διανυσμάτων $v_0, v_1, ..., v_{k-1}, v_{k+1}, ..., v_n$ που είναι άτοπο λόγω της γενικής θέσης των αρχικών σημείων. Συνεπώς κάθε βαθμωτό πολλαπλάσιο $\lambda_i v_i$ αποτελεί επίσης αντιπροσωπευτικό διάνυσμα (αφού είναι όλα μη-μηδενικά).

Μπορούμε συνεπώς να επιλέξουμε αντιπροσωπευτικά διανύσματα τέτοια ώστε

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} v_i$$

δηλαδή με $\lambda_i = 1$, $\forall i = 0, 1, ..., n$. Αυτή η αντιπροσώπευση είναι μοναδική διότι αν ίσχυε

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i$$

για κάποια $\mu_i \in \mathbb{R}$ με $i = 0, 1, ..., n$, τότε αφαιρώντας τις δύο αυτές παραπάνω σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (\mu_i - 1) v_i$$

Από τη γενική θέση των αρχικών σημείων όμως, τα αντιπροσωπευτικά διανύσματα v_0,v_1,...,v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα, συνεπώς $\mu_i - 1 = 0$, $\forall i = 0, 1, ..., n$, οπότε $\mu_i = 1$, $\forall i = 0, 1, ..., n$.

Ανάλογοι ισχυρισμοί ισχύουν για το διανυσματικό χώρο W.

Άρα επιλέγουμε αντιπροσωπευτικά διανύσματα $v_i \in V$ με $i = 0, 1, ..., n + 1$ για τα σημεία $x_i \in P(V)$ που ικανοποιούν την

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} v_i$$

και επιλέγουμε επίσης αντιπροσωπευτικά διανύσματα $w_i \in W$ με $i = 0, 1, ..., n+1$ για τα σημεία $y_i \in P(W)$ τα οποία επίσης ικανοποιούν την

$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} w_i.$$

Ορίζουμε κατόπιν τη γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ ως εξής:

$$T(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i) := \sum_{i=0}^{n} \lambda_i w_i$$

Από τη γραμμικότητα της T ο παραπάνω ορισμός σημαίνει ότι $Tv_i = w_i$ για $i = 0, 1, ..., n$ ενώ

$$Tv_{n+1} = T(\sum_{i=0}^{n} v_i) = \sum_{i=0}^{n} T(v_i) = \sum_{i=0}^{n} w_i = w_{n+1}$$

Το γεγονός ότι η γραμμική απεικόνιση T απεικονίζει τα διανύσματα της βάσης v_0,v_1,...,v_n του διανυσματικού χώρου V στα διανύσματα της βάσης w_0,w_1,...,w_n του διανυσματικού χώρου W σημαίνει πως η T είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών χώρων V και W(απεικόνιση 1-1 και επί), οπότε είναι και αντιστρέψιμη. Συνεπώς ο αντίστοιχος προβολικός μετασχηματισμός $\tau : P(V) \to P(W)$ που προκύπτει από τον παραπάνω γραμμικό μετασχηματισμό $T : V \to W$ απεικονίζει τα σημεία $x_i \in P(V)$, $i = 0, 1, ..., n+1$, στα σημεία $y_i \in P(W)$, $i = 0, 1, ..., n+1$, δηλαδή ισχύει $\tau(x_i) = y_i$ για $i = 0, 1, ..., n+1$ ικανοποιώντας τις συνθήκες του θεωρήματος.

Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα του τ εργαζόμαστε ως εξής: έστω η αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση $T' : V \to W$ που ορίζει τον προβολικό μετασχηματισμό $\tau' : P(V) \to P(W)$ με $\tau'(x_i) = y_i$, όπου $i = 0, 1, ..., n+1$. Τότε όμως για να έχουμε και πάλι $\tau'(x_i) = y_i$, για $i = 0, 1, ..., n+1$, θα πρέπει $T'(v_i) = \mu_i w_i$ για $i = 0, 1, ..., n+1$ για κάποια μη-μηδενικά μ_i, για $i = 0, 1, ..., n+1$. Όμως τότε

$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_{n+1}} w_i$$

διότι τα $w_0, w_1, ..., w_{n+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Όμως από τη μοναδικότητα της έκφρασης

$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} w_i$$

έπεται ότι $\mu_{n+1} = \mu_i = \mu \in \mathbb{R}$. Άρα $T' = \mu T$ οπότε οι T και T' ορίζουν τον ίδιο προβολικό μετασχηματισμό τ. $\square$

Παραδείγματα:

3. Στην μιγαδική προβολική ευθεία $P(\mathbb{C}^2)$ θεωρούμε τα τρία διακριτά σημεία $[0,1],[1,1],[1,0]$ μαζί με τρία τυχαία σημεία x_1, x_2, x_3. Τότε υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα x_1, x_2, x_3 στα σημεία $[0,1],[1,1],[1,0]$, στην γλώσσα της μιγαδικής ανάλυσης λέμε πως υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός Möbius που αντιστοιχεί μια τριάδα τυχαίων σημείων στα σημεία $0, 1, \infty$.

4. Σε κάθε προβολική ευθεία μπορούμε να πάρουμε τα τρία σημεία $[0,1],[1,1],[1,0]$ και για x_1, x_2, x_3 μια οποιαδήποτε μετάθεση αυτών. Οι προβολικοί μετασηματισμοί ενός προβολικού χώρου στον εαυτό του συνιστούν ομάδα με πράξη την σύνθεση, συνεπώς η ομάδα των προβολικών μετασηματισμών μιας προβολικής ευθείας περιέχει ως υποομάδα την συμμετρική ομάδα S_3. Εάν θεωρήσουμε ως σώμα το $\mathbb{Z}_2$ με στοιχεία το 0 και το 1, τα μοναδικά σημεία της προβολικής ευθείας είναι τα σημεία $[0,1],[1,1],[1,0]$ οπότε η συμμετρική ομάδα S_3 αποτελεί την πλήρη ομάδα των προβολικών μετασχηματισμών.

4.3 Προβολικοί Μετασχηματισμοί και Σχέδιο

Επανερχόμαστε σε αυτή την παράγραφο στο πρακτικό πρόβλημα που αντιμετώπιζε ο φίλος μας ο ζωγράφος (καλλιτέχνης) της Αναγέννησης για να δείξουμε ότι όταν ζωγραφίζουμε μια διαφορετική κάτοψη ενός αντικειμένου, ουσιαστικά αυτό που επιτελείται είναι ένας προβολικός μετασχηματισμός.

Αρχικά ταυτίζουμε το φυσικό 3-διάστατο χώρο με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Έστω ότι ο ζωγράφος (ακριβέστερα το μάτι του ζωγράφου) βρίσκεται σε κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}^3$ του χώρου και θέλει να ζωγραφίσει μια κάτοψη ενός αντικειμένου σε ένα καμβά που αναπαρίσταται μαθηματικά με ένα επίπεδο $\pi \in \mathbb{R}^3$ με $x \notin \pi$ (προφανώς το μάτι του ζωγράφου δε βρίσκεται πάνω στον καμβά). Για ευκολία θεωρούμε ότι όλα τα παραπάνω (καλλιτέχνης, αντικείμενο που θέλει να ζωγραφίσει αλλά και ο καμβάς) βρίσκονται μέσα στον προβολικό χώρο $P(\mathbb{R}^4)$. Αυτό είναι εφικτό γιατί από το Σχόλιο 3.6.2 γνωρίζουμε πως $P(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^3 \coprod P(\mathbb{R}^3)$, συνεπώς $\mathbb{R}^3 \subset P(\mathbb{R}^4)$.

Αφού λοιπόν $x \in \mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^3 \subset P(\mathbb{R}^4)$, έπεται ότι και $x \in P(\mathbb{R}^4)$, συνεπώς το σημείο x ορίζει ένα μονοδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο $V_x \leq \mathbb{R}^4$ με

$dimV_x = 1$, ενώ το επίπεδο π ορίζει έναν 3-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο $V_\pi \leq \mathbb{R}^4$ με $dimV_\pi = 3$ (έτσι ώστε ο προβολικός χώρος $P(\mathbb{R}^4) \supset P(V_\pi) = \pi$ και $dimP(V_\pi) = 2$). Αφού $x \notin \pi$, τότε $V_x \cap V_\pi = \{0\}$, οπότε $dim(V_x \cap V_\pi) = 0$.

Θεωρούμε στη συνέχεια το ευθύ άθροισμα $V_x + V_\pi$ το οποίο, εφαρμόζοντας τον τύπο της Πρότασης 3.1.1, έχει διάσταση

$$dim(V_x + V_\pi) = [dim(V_x)] + [dim(V_\pi)] - [dim(V_x \cap V_\pi)] = 1 + 3 - 0 = 4$$

οπότε από το Θεώρημα 3.1.1 παίρνουμε ότι

$$\mathbb{R}^4 \cong V_x + V_\pi$$

(αντί για το σύμβολο του ισομορφισμού συχνά χρησιμοποιούμε απλά το σύμβολο της ισότητας).

Συνεπώς, κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^4$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $v = v_x + v_\pi$ με $v_x \in V_x$ και $v_\pi \in V_\pi$ αντίστοιχα.

Ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $p_\pi : \mathbb{R}^4 \to V_\pi$ με τύπο $p_\pi(v) = v_\pi$ (προβολή στην v_π συνιστώσα). Καθαρά $Ker(p_\pi) = V_x$ διότι τα στοιχεία του V_x έχοντας εξ ορισμού v_π συνιστώσα 0 απεικονίζονται μέσω της p_π στο 0. Κατά συνέπεια η p_π ορίζει έναν προβολικό μετασχηματισμό

$$\varpi_\pi : P(\mathbb{R}^4) - P(V_x) \to P(V_\pi).$$

Υπενθυμίζουμε ότι $P(V_x) = x$, που αντιστοιχεί στο σημείο που βρίσκεται το μάτι του ζωγράφου ενώ $P(V_\pi) = \pi$, που αντιστοιχεί στον καμβά του ζωγράφου.

Η απεικόνιση ϖ_π είναι εύκολο να περιγραφεί: αν $y \neq x$, τότε το y έχει ένα αντιπροσωπευτικό διάνυσμα $\mathbb{R}^4 \ni v(y) = v(y)_x + v(y)_\pi$ με $v(y)_\pi \neq 0$ (διότι αν $v(y)_\pi = 0$, τότε $v(y) = v(y)_x$, δηλαδή $v \in Ker(p_\pi)$, άτοπο). Συνεπώς το διάνυσμα $v(y)_\pi = v(y) - v(y)_x$ θα βρίσκεται στον 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v(y)$ και $v(y)_x$ (αφού όπως μόλις είδαμε γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών). Όμως τότε το σημείο $\varpi_\pi(y)$, του οποίου το $v(y)_\pi$ αποτελεί αντιπροσωπευτικό διάνυσμα (στοιχείο που έπεται από τον ορισμό της γραμμικής απεικόνισης p_π που παράγει τον προβολικό μετασχηματισμό ϖ_π), θα βρίσκεται στην προβολική ευθεία που ενώνει τα σημεία x και y. Όμως το σημείο $\varpi_\pi(y) \in P(V_\pi)$, συνεπώς αυτό είναι το σημείο που ζωγραφίζει ο ζωγράφος στον καμβά του, που απεικονίζει το σημείο y του χώρου.

Στη συνέχεια κρατάμε σταθερή τη θέση x του ζωγράφου και αλλάζουμε το επίπεδο προβολής από το π σε κάποιο διαφορετικό π' (ενέργεια που ισοδυναμεί σε αλλαγή κάτοψης που θέλουμε να ζωγραφίσουμε το ίδιο αντικείμενο). Ανάλογα θα έχουμε

$$\mathbb{R}^4 \cong V_x + V_\pi \cong V_x + V_{\pi'}$$

Θεωρούμε τώρα τη γραμμική απεικόνιση $p_{\pi'} : \mathbb{R}^4 \to V_{\pi'}$ με τύπο $p_{\pi'}(v) = v_{\pi'}$. Προφανώς τώρα και πάλι $Ker(p_{\pi'}) = V_x$. Θεωρούμε στη συνέχεια τον περιορισμό $p_{\pi'}|_{V_\pi}$ της p_π με πεδίο ορισμού όχι ολόκληρο το $\mathbb{R}^4$ αλλά μόνο το V_π, δηλαδή θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $p_{\pi'}|_{V_\pi} : V_\pi \to V_{\pi'}$. Προφανώς τώρα αφού $V_x \cap V_\pi = \{0\}$, η γραμμική απεικόνιση $p_{\pi'}|_{V_\pi}$ (δηλαδή ο περιορισμός της p_π στο V_π) θα είναι *αντιστρέψιμη* οπότε ορίζει τον προβολικό μετασχηματισμό

$$\varpi : P(V_\pi) \to P(V_{\pi'})$$

Συνεπώς είδαμε πως *η αναπαράσταση μιας διαφορετικής κάτοψης ενός αντικειμένου αντιστοιχεί σε έναν προβολικό μετασχηματισμό.*

Παρατήρηση 1: Το Θεώρημα 4.2.1 για την ειδική περίπτωση του προβολικού επιπέδου, μας λέει πως μια τετράδα σημείων σε γενική θέση αντιστοιχεί μέσω ενός προβολικού μετασχηματισμού σε οποιαδήποτε άλλη τετράδα σημείων σε γενική θέση. Αν αυτό συνδυαστεί με το Παράδειγμα 4.2.2 που λέει ότι κάθε τετράδα σημείων στο προβολικό επίπεδο στην οποία δεν υπάρχει καμία συνευθειακή τριάδα βρίσκονται σε γενική θέση, λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα ότι στο προβολικό επίπεδο, ένας προβολικός μετασχηματισμός απεικονίζει οποιαδήποτε τετράδα σημείων που δεν έχει συνευθειακή τριάδα σε μια οποιαδήποτε άλλη τετράδα σημείων που δεν περιέχει συνευθειακή τριάδα. Με απλά λόγια αυτό σημαίνει πως *όλα τα τετράπλευρα σχήματα στο προβολικό επίπεδο είναι ισοδύναμα μέσω κάποιου προβολικού μετασχηματισμού.* Για παράδειγμα ένα τετράγωνο μέσω ενός προβολικού μετασχηματισμού μετατρέπεται σε τυχαίο τετράπλευρο, δηλαδή οι *προβολικοι μετασχηματισμοί δεν διατηρούν αναλλοίωτα ούτε τα μήκη ούτε τις γωνίες.*

Για παράδειγμα, ως γνωστόν ο κύβος έχει 6 έδρες που είναι τετράγωνα. Όταν όμως αναπαριστάμε έναν κύβο στο επίπεδο, δηλαδή όταν σχεδιάζουμε μια κάτοψη αυτού στο επίπεδο, κάποιες έδρες αναπαρίστανται ως πλάγια παραλληλόγραμμα, δηλαδή βλέπουμε στην πράξη έναν προβολικό μετασχηματισμό που δεν διατηρεί τα μήκη και τις γωνίες.

Παρατήρηση 2: Εάν εφοδιάσουμε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο με το γνωστό Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, τότε γνωρίζουμε πως οι *ορθογώνιοι μετασχηματισμοί* διατηρούν αναλλοίωτο το εσωτερικό γινόμενο, άρα τα μήκη,

(γι΄ αυτό λέγονται και *ισομετρίες*). Κατ΄ επέκταση διατηρούν αναλλοίωτες και τις γωνίες (θυμηθείτε τον ορισμό του συνημιτόνου της γωνίας δύο διανυσμάτων ως το πηλίκο του εσωτερικού γινομένου αυτών δια του γινομένου των μέτρων τους). Το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα.

Υπάρχει μια άλλη κατηγορία γραμμικών μετασχηματισμών οι οποίοι είναι ευρύτεροι από τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς και λέγονται *σύμμορφοι μετασχηματισμοί*. Αυτοί διατηρούν αναλλοίωτες μόνο τις γωνίες αλλά όχι τα μήκη. Για παράδειγμα θυμηθείτε την ομοιότητα των σχημάτων, λόγου χάριν την ομοιότητα τριγώνων στο επίπεδο σε αντιδιαστολή με την ισότητα τριγώνων που γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία, η ομοιότητα αποτελεί σύμμορφο μετασχηματισμό ενώ η ισότητα αποτελεί ορθογώνιο μετασχηματισμό. Δύο ίσα τρίγωνα είναι και όμοια αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

Οι προβολικοί μετασχηματισμοί όπως είδαμε, είναι ακόμη ευρύτεροι επειδή δε διατηρούν αναλλοίωτα ούτε τα μήκη ούτε τις γωνίες. Θα δούμε στη συνέχεια ποιες ποσότητες διατηρούνται αναλλοίωτες κάτω από προβολικούς μετασχηματισμούς ενώ επίσης θα δούμε ότι και οι προβολικοί μετασχηματισμοί επίσης αποτελούν ομάδα. Μια ισομετρία του επιπέδου για παράδειγμα απεικονίζει ένα τρίγωνο σε ένα άλλο τρίγωνο ίσο με το αρχικό. Ένας σύμμορφος μετασχηματισμός του επιπέδου απεικονίζει ένα τρίγωνο σε ένα άλλο τρίγωνο όμοιο με το αρχικό. Ένας προβολικός μετασχηματισμός στο προβολικό επίπεδο απεικονίζει ένα τρίγωνο σε ένα *οποιοδήποτε* άλλο τρίγωνο του προβολικού επιπέδου.

5 Δυϊσμός

Η προβολική γεωμετρία δίδει μια πιο συγκεκριμένη εικόνα της έννοιας του δυϊσμού που έχουμε δει στην γραμμική άλγεβρα.

5.1 Δυϊκός Προβολικός Χώρος και Αρχή Δυϊσμού

Ξεκινάμε με ανασκόπηση ορισμένων στοιχείων από τη γραμμική άλγεβρα.

Ορισμός 1. Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με $dimV = n+1$. Ο *δυϊκός χώρος* V^* του V ορίζεται ως το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $f : V \to \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα ότι ο V^* αποτελεί πραγματικό διανυσματικό χώρο με την ίδια διάσταση όπως ο V, δηλαδή $dimV = dimV^*$ (συνεπώς διανυσματικοί χώροι V και V^* είναι ισόμορφοι $V \cong V^*$ αλλά δεν υπάρχει φυσικός ισομορφισμός μεταξύ τους).

Ορισμός 2. Έστω $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ μια βάση του V. Τότε ορίζεται η *δυϊκή βάση* $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ της $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ του V^* από τη σχέση $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, όπου δ_{ij} το γνωστό *δέλτα του Kronecker*, δηλαδή

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{για} \quad i = j, \\ 0, & \text{για} \quad i \neq j, \end{cases} \quad \text{όπου } i, j = 0, 1, ..., n.$$

Ορισμός 3. Εάν $T : V \to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $T^* : W^* \to V^*$ που ορίζεται από τη σχέση

$$(T^* f)(v) = f(T(v)),$$

όπου $v \in V$ και $f \in W^*$.

Ορισμός 4. Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με $dimV = n+1$ και έστω $P(V)$ ο αντίστοιχος προβολικός χώρος. Ο προβολικός χώρος $P(V^*)$ που αποτελείται από τους μονοδιάστατους διανυσματικούς υποχώρους του δυϊκού διανυσματικού χώρου V^* του V ονομάζεται *δυϊκός προβολικός χώρος*.

Ένας μονοδιάστατος διανυσματικός υπόχωρος του V^* αποτελείται από όλα τα βαθμωτά πολλαπλάσια λf, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in V^*$, μιας μη-μηδενικής γραμμικής απεικόνισης $f : V \to \mathbb{R}$. Από τη γραμμικότητα της f έπεται ότι αφού είναι μη-μηδενική, η εικόνα της $Im(f)$ θα είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$, συνεπώς $dim[Ker(f)] = dimV - dim[Im(f)] = dimV - 1$ (διότι $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$).

Συνεπώς το $Ker(f)$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του V, δηλαδή έχουμε ότι $Ker(f) \leq V$ με $dim[Ker(f)] = dimV - 1$. Φανερά ο διανυσματικός υπόχωρος $Ker(f)$ του V είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του αντιπροσωπευτικού διανύσματος f διότι $Ker(\lambda f) = Ker(f)$ αν $\lambda \neq 0$. Άρα λοιπόν *ένα τυχαίο σημείο του* $P(V^*)$ (με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα της μορφής λf με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in V^*$), *αναπαριστά ένα διανυσματικό υπόχωρο του* V *διάστασης* $dimV - 1$ *(που είναι ο* $Ker(f)$*)*, ή ισοδύναμα *ένα τυχαίο σημείο του* $P(V^*)$ *(με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα της μορφής* λf *με* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και* $f \in V^*$*), αναπαριστά ένα γραμμικό υπόχωρο του* $P(V)$ *διάστασης* $dimP(V) - 1$ (που είναι ο $P(Ker(f))$).

Ορισμός 5. Ένα *υπερεπίπεδο* σε έναν προβολικό χώρο $P(V)$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος $P(U)$ με διάσταση κατά 1 μικρότερη από τη διάσταση του $P(V)$. Λέμε επίσης ότι ο $P(U)$ έχει *συνδιάσταση* 1.

Αντίστροφα, αν $W \leq V$ με $dimW = dimV - 1$, επιλέγουμε μια βάση $\{w_0, w_1, ..., w_{n-1}\}$ του W και την επεκτείνουμε στην $\{w_0, w_1, ..., w_{n-1}, w_n\}$ που αποτελεί μια βάση του V. Αν $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ είναι η δυϊκή της βάση του V^*, τότε από τον ορισμό της δυϊκής βάσης έπεται ότι $W = Ker(f_n)$.

Κάθε διανυσματικός υπόχωρος $W \leq V$ με $dimW = (dimV) - 1$ προκύπτει με τον παραπάνω τρόπο, συνεπώς έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1: *Υπάρχει μια απεικόνιση 1-1 και επί μεταξύ των σημείων του* $P(V^*)$ *και του συνόλου των γραμμικών υποχώρων του* $P(V)$ *με διάσταση* $dimP(V) - 1$.

Απόδειξη: Μια υπερεπιφάνεια ορίζει έναν διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$ με $\dim U = \dim V - 1$, οπότε έχουμε έναν χώρο πηλίκο V/U διάστασης 1 και έναν γραμμικό επιμορφισμό

$$\pi V \to V/U$$

που ορίζεται μέσω της σχέσης $\pi(v) = v + U$. Εάν $\nu \in V/U$ είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα, τότε

$$\pi(v) = f(v)\nu$$

για κάποια γραμμική απεικόνιση $f : V \to \mathbb{R}$, και τότε $U = \ker f$. Μια διαφορετική επιλογή του ν αλλάζει την f στην λf, οπότε το υπερεπίπεδο $P(U)$ ορίζει ένα σημείο $[f] \in P(V^*)$. $\square$

Σημείωση 1: Γενικά για κάθε χώρο, οι υπόχωροι αυτού με διάσταση κατά ένα μικρότερη από τη διάσταση του αρχικού χώρου ονομάζονται *υπερεπιφάνειες*

ή υπερεπίπεδα.

Δηλαδή η αρχή του δυϊσμού μας λέει πως υπάρχει αντιστοιχία 1-1 και επί μεταξύ των σημείων του $P(V^*)$ και των υπερεπιπέδων του $P(V)$.

Παραδείγματα.

1. Εάν $dimV = 2$, τότε επίσης θα έχουμε $dimV^* = 2$, ενώ $dimP(V) = dimP(V^*) = 1$, προβολική ευθεία. Τα σημεία της δυϊκής προβολικής ευθείας $P(V^*)$ αντιστοιχούν σε υπόχωρους της προβολικής ευθείας $P(V)$ διάστασης $dimP(V) - 1 = 0$, δηλαδή *τα σημεία της δυϊκής προβολικής ευθείας $P(V^*)$ αντιστοιχούν σε σημεία της προβολικής ευθείας $P(V)$.*

Υπάρχει συνεπώς μια απεικόνιση 1-1 και επί

$$\tau : P(V^*) \to P(V)$$

η οποία ουσιαστικά αποτελεί έναν προβολικό μετασχηματισμό. Αν επιλέξουμε μια βάση $\{v_0, v_1\}$ του V και τη δυϊκή της βάση $\{f_0, f_1\}$ του V^*, τότε αν $V^* \ni f = a_0 f_0 + a_1 f_1$ και $V \ni v = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1$ τυχαία διανύσματα, θα έχουμε από τη γραμμικότητα της f και τον ορισμό της δυϊκής βάσης $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ ότι $f(v) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 = 0$ διότι:

$$f(v) = 0 \Leftrightarrow (a_0 f_0 + a_1 f_1)(v) = 0 \Leftrightarrow a_0 f_0(v) + a_1 f_1(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 f_0(\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1) + a_1 f_1(\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 \lambda_0 f_0(v_0) + a_0 \lambda_1 f_0(v_1) + a_1 \lambda_0 f_1(v_0) + a_1 \lambda_1 f_1(v_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 \lambda_0 1 + a_0 \lambda_1 0 + a_1 \lambda_0 0 + a_1 \lambda_1 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 = 0.$$

Συνεπώς το διάνυσμα $v = a_1 v_0 - a_0 v_1$ είναι ένα αντιπροσωπευτικό διάνυσμα του $Ker(f)$ διότι από γραμμικότητα έχουμε:

$$f(v) = f(a_1 v_0 - a_0 v_1) = a_1 f(v_0) - a_0 f(v_1)$$

$$= a_1(a_0 f_0 + a_1 f_1)(v_0) - a_0(a_0 f_0 + a_1 f_1)(v_1)$$

$$= a_1 a_0 f_0(v_0) + a_1 a_1 f_1(v_0) - a_0 a_0 f_0(v_1) - a_0 a_1 f_1(v_1)$$

$$= a_1 a_0 1 + a_1 a_1 0 - a_0 a_0 0 - a_0 a_1 1 = a_1 a_0 - a_0 a_1 = 0$$

Συνεπώς σε ομογενείς συντεταγμένες

$$\tau(a_0, a_1) = (a_1, -a_0)$$

που αποτελεί αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό, άρα ορίζεται ο αντίστοιχος προβολικός μετασχηματισμός.

2. Εάν $dimV = 3$, τότε επίσης θα έχουμε $dimV^* = 3$, ενώ $dimP(V) = dimP(V^*) = 2$, προβολικό επίπεδο. Τα σημεία του δυϊκού προβολικού επιπέδου $P(V^*)$ αντιστοιχούν σε υπόχωρους του προβολικού επιπέδου $P(V)$ διάστασης $dimP(V) - 1 = 1$, δηλαδή *τα σημεία του δυϊκού προβολικού επιπέδου $P(V^*)$ αντιστοιχούν σε ευθείες του προβολικού επιπέδου $P(V)$.*

3. Εάν $dimV = 4$, τότε επίσης θα έχουμε $dimV^* = 4$, ενώ $dimP(V) = dimP(V^*) = 3$. Τα σημεία του δυϊκού προβολικού χώρου $P(V^*)$ αντιστοιχούν σε υπόχωρους του προβολικού χώρου $P(V)$ διάστασης $dimP(V) - 1 = 2$, δηλαδή *τα σημεία του δυϊκού προβολικού χώρου $P(V^*)$ αντιστοιχούν σε επίπεδα του προβολικού χώρου $P(V)$.*

Ο *δυϊκός του δυϊκού χώρου* $(V^*)^*$ θα συμβολίζεται απλούστερα V^{**} και ταυτίζεται με το διανυσματικό χώρο V μέσω ενός φυσικού ισομορφισμού, $V \cong V^{**}$, που ορίζεται χρησιμοποιώντας τον *αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό* $T : V \to V^{**}$ με $V \ni v \mapsto Tv \in V^{**}$ που ορίζεται ως εξής:

$$Tv(f) = f(v)$$

όπου $v \in V$, $Tv \in V^{**}$ και $f \in V^*$, δηλαδή $f : V \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση.

Αφού $V \cong V^{**}$, τότε θα έχουμε ταύτιση και των αντίστοιχων προβολικών χώρων $P(V) \simeq P(V^{**})$.

Η αρχή δυϊσμού μεταξύ των προβολικών χώρων $P(V)$ και $P(V^*)$ μας λέει πως τα σημεία του $P(V^*)$ αντιστοιχούν στα υπερεπίπεδα του $P(V)$. Αν εφαρμόσουμε και πάλι την αρχή δυϊσμού, αυτή τη φορά μεταξύ των χώρων $P(V^*)$ και $P(V^{**})$ θα πάρουμε ότι τα σημεία του $P(V^{**})$ αντιστοιχούν στα υπερεπίπεδα του $P(V^*)$. Όμως ο $P(V^{**})$ ταυτίζεται με τον $P(V)$, συνεπώς τα σημεία του $P(V)$ αντιστοιχούν στα υπερεπίπεδα του $P(V^*)$. Αν συνδυάσουμε τις δύο παραπάνω προτάσεις παρατηρούμε πως η αρχή δυϊσμού συμπληρώνεται και μας λέει το εξής:

Τα σημεία του $P(V^*)$ αντιστοιχούν με τρόπο 1-1 και επί με τα υπερεπίπεδα του $P(V)$ και αντίστροφα τα σημεία του $P(V)$ αντιστοιχούν με τρόπο 1-1 και επί με τα υπερεπίπεδα του $P(V^*)$.

5.2 Μηδενιστής Διανυσματικού Χώρου και Δυϊσμός

Ορισμός 1. Έστω V (πραγματικός) διανυσματικός χώρος με $dimV = n+1$. Σε κάθε διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν διανυσματικό υπόχωρο $U^0 \leq V^*$ που λέγεται *μηδενιστής του* U ο οποίος ορίζεται ως εξής: $U^0 := \{f \in V^* | f(u) = 0, \forall u \in U\}$. Δηλαδή ο μηδενιστής U^0 του $U \leq V$ αποτελείται από εκείνες τις γραμμικές απεικονίσεις $f : V \to \mathbb{R}$ που απεικονίζουν κάθε διάνυσμα $u \in U$ στο 0.

Πρόταση 1.

$$dimU + dimU^0 = dimV$$

Απόδειξη: Έστω $dimU = r+1)$ και $dimV = n+1$. Επιλέγουμε μια βάση $\{u_0, u_1, ..., u_r\}$ του $U \leq V$, την επεκτείνουμε σε μια πλήρη βάση $\{u_0, u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_{n-r}\}$ του V και θεωρούμε τη δυϊκή της βάση $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ του V^*. Τότε για $r+1 \leq i \leq n$, $f_i(u_j) = 0$, οπότε $f_i \in U^0$.

Αντίστροφα, εάν $f \in U^0$, γράφουμε

$$f = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i.$$

Τότε $0 = f(u_i) = c_i$, οπότε η f αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των f_i για $r+1 \leq i \leq n$, συνεπώς τα $f_{r+1}, ..., f_n$ αποτελούν μια βάση του U^0 και

$$dimU + dimU^0 = (r+1) + (n-r) = n+1 = dimV.$$

□

Εάν θεωρήσμουμε τον δυϊκό του δυϊκού χώρου, παίρνουμε τον διανυσματικό χώρο V^{**}, ο οποίος είναι με φυσικό τρόπο ισόμορφος με τον V. Για να το δούμε καλύτερα αυτό, έστω $S : V \to V^{**}$ που ορίζεται ως

$$Sv(f) = f(v).$$

Η S είναι γραμμική ενώ ο πυρήνας $Ker(S)$ αποτελείται από τα διανύσματα για τα οποία $f(v) = 0 \forall f$ και είναι ίσος με το 0 διότι αν όχι θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε το $v = v_1$ σε μια βάση και $f_1(v_1) \neq 0$. Αφού $\dim V = \dim V^*$, η S αποτελεί ισομορφισμό. Κάτω από αυτό τον μετασχηματισμό, για κάθε διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$, $S(U) = U^{00}$. Αυτό προκύπτει διότι εάν $u \in U$ και $f \in U^0$

$$Su(f) = f(u) = 0,$$

οπότε $S(U) \leq U^{00}$. Όμως οι διαστάσεις είναι ίσες οπότε έχουμε ισότητα.

Οι βασικές ιδιότητες του μηδενιστή φαίνονται στην παρακάτω Πρόταση (για την απόδειξη βλέπε κάποιο βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας):

Πρόταση 2. Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, $U \leq V$ και έστω U^0 ο μηδενιστής του διανυσματικού υποχώρου U. Τότε ισχύουν τα εξής:
(i) Μέσω του φυσικού ισομορφισμού $V = V^{**}$, έχουμε ότι $(U^0)^0 = U$.
(ii) Αν $U_1, U_2 \leq V$ με $U_1 \leq U_2$, τότε $U_2^0 \leq U_1^0$.
(iii) $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$.
(iv) $(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$.

Υπενθυμίζουμε ότι η αρχή δυϊσμού που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο αφορούσε την αντιστοιχία μεταξύ *σημείων* (υπόχωροι διάστασης 0) και *υπερεπιπέδων* (υπόχωροι με διάσταση κατά ένα μικρότερη από τη διάσταση του αρχικού χώρου).

Οι μηδενιστές όχι μόνο μπορούν να δώσουν μια εναλλακτική περιγραφή της αρχής του δυϊσμού, αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι μπορούν να γενικεύσουν την αρχή δυϊσμού μεταξύ υπόχωρων οποιασδήποτε διάστασης. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

Είδαμε πως η έννοια του μηδενιστή αντιστοιχεί σε κάθε διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$ ένα διανυσματικό υπόχωρο $U^0 \leq V^*$ και κατ' επέκταση σε κάθε γραμμικό υπόχωρο $P(U) \subseteq P(V)$ αντιστοιχεί ένα γραμμικό υπόχωρο $P(U^0) \subseteq P(V^*)$. Αφού

$$dimU^0 = dimV - dimU,$$

έπεται ότι

$$dimP(U^0) = dimP(V) - dimP(U) - 1.$$

Αν $dimP(U) = dimP(V) - 1$, τότε $dimP(U^0) = 0$ οπότε το $P(U^0)$ είναι σημείο του $P(V^*)$. Αυτή είναι η αντιστοιχία που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο μεταξύ σημείων του $P(V^*)$ και υπερεπιφανειών του $P(V)$ εκπεφρασμένη με χρήση μηδενιστών.

Ας δούμε ένα γενικότερο παράδειγμα που αφορά δυϊσμό μεταξύ υποχώρων διάστασης ένα: έστω $dimP(V) = 3$. Τότε αν $dimP(U) = 1$, τότε $dimP(U^0) = 1$, συνεπώς *οι ευθείες του $P(V)$ αντιστοιχούν με τρόπο 1-1 και*

επί με τις ευθείες του δυϊκού προβολικού χώρου $P(V^*)$.

Σχηματικά η αρχή δυϊσμού περιγράφεται με τις παρακάτω αντιστοιχίες:

$$V \longleftrightarrow V^*$$
$$dimV = dimV^* = n+1$$
$$P(V) \longleftrightarrow P(V^*)$$
$$dimP(V) = dimP(V^*) = n$$
$$U \leq V, dimU = k, (0 < k < n+1) \longleftrightarrow U^0 \leq V^*, dimU^0 = n+1-k$$

Αρχή Δυϊσμού: *αντιστοιχία 1-1 και επί μεταξύ* $P(U) \longleftrightarrow P(U^0)$

$$dimP(U) = k-1 \longleftrightarrow dimP(U^0) = n-k$$

Από τον παραπάνω γενικό πίνακα δυϊσμού, βλέπουμε για παράδειγμα πως τα *σημεία* του $P(V^*)$ (τα οποία αντιστοιχούν σε υποχώρους $P(U^0) \subseteq P(V^*)$ του δυϊκού προβολικού χώρου διάστασης μηδέν, δηλαδή $dimP(U^0) = 0 \Leftrightarrow n-k = 0 \Leftrightarrow n = k$), αντιστοιχούν σε υποχώρους $P(U) \subseteq P(V)$ με διάσταση $dimP(U) = k-1 = n-1$, δηλαδή σε *υπερεπίπεδα* του $P(V)$, κάτι που συμφωνεί με τα παραπάνω.

Τα *υπερεπίπεδα* του $P(V^*)$ (τα οποία αντιστοιχούν σε υποχώρους $P(U^0) \subseteq P(V^*)$ του δυϊκού προβολικού χώρου διάστασης $n-1$, δηλαδή $dimP(U^0) = n-1 \Leftrightarrow n-k = n-1 \Leftrightarrow k = 1$), αντιστοιχούν σε υποχώρους $P(U) \subseteq P(V)$ με διάσταση $dimP(U) = k-1 = 1-1 = 0$, δηλαδή σε *σημεία* του $P(V)$, πράγμα που συμφωνεί με όσα έχουμε ήδη πεί.

Τέλος παρατηρούμε ότι αν $dimP(V) = n = 3$, τότε οι *ευθείες* του προβολικού χώρου $P(V)$ που αντιστοιχούν σε υποχώρους $P(U) \subseteq P(V)$ με διάσταση $dimP(U) = k-1 = 1 \Leftrightarrow k = 2$, αντιστοιχούν σε υποχώρους $P(U^0) \subseteq P(V^*)$ του δυϊκού προβολικού χώρου διάστασης $n-k = 1$, δηλαδή σε *ευθείες* του δυϊκού προβολικού χώρου.

Μπορούμε να κάνουμε την παραπάνω συζήτηση λίγο πιο αυστηρή: Ο χώρος των υπερεπιπέδων έχει δομή προβολικού χώρου και οι γραμμικοί υπόχωροι του $P(V^*)$ έχουν μια γεωμετρική ερμηνεία. Από την γραμμική άλγεβρα η ερμηνεία είναι άμεση: Εάν $\dim V = n+1$, σε κάθε διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$ με $\dim U = m+1$ αντιστοιχούμε τον μηδενιστή $U^0 \leq V^*$ με $\dim U^0 = n-m$,

Αντίστροφα, δοθέντος $W \leq V^*$, θεωρούμε τον μηδενιστή $W^0 < V^{**}$ οπότε $W^0 = S(U)$ για κάποιο U και αφού $S(U) = U^{00}$ έπεται ότι

$$W = U^0.$$

Συνεπώς παίρνοντας τον μηδενιστή ορίζουμε μια απεικόνιση 1:1 μεταξύ διανυσματικών υποχώρων του V και διανυσματικών υποχώρων του V^*. Ισχύει η παρακάτω γεωμετρική ερμηνεία:

Πρόταση 3. Ένας γραμμικός υπόχωρος $P(W) \subseteq P(V^*)$ διάστασης m ενός δυϊκού προβολικού χώρου $P(V^*)$ διάστασης n αποτελείται από τα υπερεπίπεδα του $P(V)$ που περιέχουν έναν σταθερό γραμμικό υπόχωρο $P(U) \subseteq P(V)$ διάστασης $n - m - 1$.

Απόδειξη: Όπως είδαμε παραπάνω, $W = U^0$ για κάποιον διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$, οπότε η $f \in W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(U) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $U \subset \ker f$ οπότε το υπερεπίπεδο που ορίζει η f περιέχει το $P(U)$. $\square$

Μια ειδική περίπτωση του παραπάνω είναι ένα υπερεπίπεδο του $P(V^*)$. Αυτό αποτελείται από τα υπερεπίπεδα του $P(V)$ που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο $x \in P(V)$ και αυτό περιγράφει γεωμετρικά τον προβολικό μετασχηματισμό που ορίζεται από την S

$$P(V) \simeq P(V^{**}).$$

Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά είναι ευκρινέστερα στις χαμηλές διαστάσεις. Ένα υπερεπίπεδο σε μια προβολική ευθεία είναι απλά ένα σημείο, οπότε υπάρχει φυσικός ισομορφισμός $P(V) \simeq P(V^*)$ και ο δυϊσμός δεν δίδει κάτι καινούργιο. Σε ένα προβολικό επίπεδο όμως ένα υπερεπίπεδο είναι μια ευθεία οπότε ο $P(V^*)$ είναι ο χώρος των ευθειών του $P(V)$. Ο χώρος των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο $x \in P(V)$ συνιστά μια ευθεία x^0 στον $P(V^*)$. Δοθέντων δύο σημείων x, y, υπάρχει μοναδική ευθεία που τα ενώνει, οπότε θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό σημείο στον $P(V^*)$ που να ανήκει και στις δύο ευθείες x^0, y^0. Ο δυϊσμός συνεπώς δείχνει ότι η Πρόταση 3.4.1 είναι ίδια με την Πρόταση 3.4.2 εάν εφαρμόσουμε την δεύτερη στον δυϊκό προβολικό χώρο $P(V^*)$!

5.3 Εφαρμογές Δυϊσμού: Θεώρημα Desargues, Θεώρημα Πάππου

Η χρησιμότητα της (γενικευμένης) αρχής δυϊσμού είναι μεγάλη διότι θα δούμε πως για κάθε θεώρημα αποκτάμε αυτομάτως και τη δυϊκή μορφή του.

Έστω προβολικός χώρος $P(V)$, με $dimP(V) = 2$, συνεπώς μιλάμε για το προβολικό επίπεδο. Οι μόνοι γραμμικοί υπόχωροι αυτού είναι τα σημεία και οι ευθείες. Από τον πίνακα δυϊσμού προκύπτει άμεσα ότι αν $(P(U) =)x \subseteq P(V)$ κάποιο σημείο, τότε $(P(U^0) =)x^0 \subseteq P(V^*)$ θα έχει διάσταση 1 οπότε θα αποτελεί ευθεία ενώ αν $a \subseteq P(V)$ ευθεία, τότε το $a^0 \subseteq P(V^*)$ θα έχει διάσταση μηδέν οπότε θα αποτελεί σημείο. Από την Πρόταση 5.2.2.**(ii)** έπεται ότι αν $x \in a$, τότε $a^0 \in x^0$. Ομοίως, αν $x, y \in a$ δύο σημεία της ευθείας a, τότε έπεται ότι $a^0 \in x^0$ αλλά και $a^0 \in y^0$, που σημαίνει ότι η δυϊκή εικόνα μιας ευθείας a που περιέχει τα σημεία x, y είναι ότι οι ευθείες x^0 και y^0 τέμνονται στο σημείο a^0. Με βάση τα παραπάνω θα αποδείξουμε το *Θεώρημα Desargues*:

Θεώρημα 1. *Έστω P, A, A', B, B', C, C' επτά διαφορετικά σημεία σε έναν προβολικό χώρο $P(V)$ τέτοια ώστε οι ευθείες AA', BB' και CC' να είναι διαφορετικές και συνδιερχόμενες από το σημείο P. Τότε τα σημεία τομής R, S, T των ζευγών των ευθειών AB και $A'B'$, BC και $B'C'$, CA και $C'A'$ αντίστοιχα, είναι συνευθειακά.*

Απόδειξη: Επιλέγουμε αντιπροσωπευτικά διανύσματα $p, a, a', b, b', c, c' \in V$ για τα σημεία $P, A, A', B, B', C, C' \in P(V)$ αντίστοιχα. Από το Παράδειγμα 4.2.1 γνωρίζουμε πως μια τριάδα διαφορετικών σημείων σε μια ευθεία βρίσκονται πάντα σε γενική θέση, συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε αντιπροσωπευτικά διανύσματα όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1 εντός των τριών δισδιάστατων διανυσματικών υποχώρων του V των οποίων οι αντίστοιχοι προβολικοί χώροι είναι οι ευθείες PAA', PBB' και PCC' στον $P(V)$. Με άλλα λόγια μπορούμε να επιλέξουμε διανύσματα $a, a', b, b', c, c' \in V$ έτσι ώστε

$$p = a + a'$$

$$p = b + b'$$

$$p = c + c'$$

Αφαιρώντας τις δύο πρώτες εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε $0 = a + a' - b - b' \Leftrightarrow b' - a' = a - b = r$, όπου r κάποιο διάνυσμα. Αφού το διάνυσμα r βρίσκεται στο επίπεδο που παράγουν τα a, b (αφού γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών), τότε το r αναπαριστά ένα σημείο $R \in P(V)$ που βρίσκεται στην ευθεία AB, δηλαδή $R \in AB$. Όμως το r επίσης ανήκει και στο επίπεδο που παράγουν τα διανύσματα a', b', συνεπώς θα είναι επίσης και σημείο της ευθείας $A'B'$, δηλαδή $R \in A'B'$. Άρα το R είναι το μοναδικό σημείο τομής των ευθειών AB και $A'B'$.

Εντελώς ανάλογα αφαιρώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις κατά μέλη προκύπτει ότι $0 = b + b' - c - c' \Leftrightarrow c' - b' = b - c = s$, όπου s κάποιο διάνυσμα που αναπαριστά την τομή των ευθειών BC και BC' ενώ αφαιρώντας την πρώτη από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $0 = c + c' - a - a' \Leftrightarrow a' - c' = c - a = t$, όπου t κάποιο διάνυσμα που αναπαριστά την τομή των ευθειών CA και $C'A'$. Όμως $r + s + t = a - b + b - c + c - a = 0$ οπότε το r βρίσκεται στο διανυσματικό χώρο που παράγουν τα διανύσματα s, t (διότι τα r, s, t είναι γραμμικά εξαρτημένα), συνεπώς το R βρίσκεται πάνω στην ευθεία ST, οπότε τα σημεία R, S, T είναι συνευθειακά. $\square$

Σημείωση 1: Ο Girard Desargues (1591-1661) ήταν ένας Γάλλος μαθηματικός από την πόλη Λυών, σύγχρονος του Καρτέσιου και του Πασκάλ. Θεωρείται ο πατέρας της Προβολικής Γεωμετρίας.

Σημείωση 2: Το Θεώρημα Desargues είναι ένα θεώρημα που αφορά τον προβολικό χώρο και αποδεικνύεται με χρήση γραμμικής άλγεβρας (γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων). Εάν θεωρήσουμε πως ο προβολικός χώρος είναι το πραγματικό προβολικό επίπεδο και περιοριστούμε στα δεδομένα που ευρίσκονται επί του επιπέδου (βλ σχήμα), θα πάρουμε ένα θεώρημα που αφορά προβολικά τρίγωνα το οποίο είναι αρκετά πιο δύσκολο να αποδειχθεί με χρήση Ευκλείδειας γεωμετρίας του επιπέδου.

Για να πάρουμε τη δυϊκή έκδοση του παραπάνω θεωρήματος, αρκεί να παρατηρήσουμε πως αν $dimP(V) = 2$, τότε θα ασχοληθούμε με το δυϊκό προβολικό χώρο $P(V^*)$ παρατηρώντας πως τώρα τα επτά σημεία θα γίνουν επτά ευθείες, οπότε θα έχουμε το *Δυϊκό Θεώρημα Desargues*:

Θεώρημα 1′. *Έστω $\pi, \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ επτά διαφορετικές ευθείες σε ένα προβολικό επίπεδο $P(V)$ (δηλαδή $dimP(V) = 2$) τέτοιες ώστε τα σημεία τομής τους ανά ζεύγη $\alpha \cap \alpha'$, $\beta \cap \beta'$ και $\gamma \cap \gamma'$ να είναι διαφορετικά και να βρίσκονται στην ευθεία π. Τότε οι ευθείες που ενώνουν τα σημεία τομής $\alpha \cap \beta$ και $\alpha' \cap \beta'$, $\beta \cap \gamma$ και $\beta' \cap \gamma'$, $\gamma \cap \alpha$ και $\gamma' \cap \alpha'$ είναι συνδιερχόμενες (τέμνονται σε ένα σημείο).*

Για το παραπάνω Θεώρημα 1′ δεν απαιτείται απόδειξη καθώς προκύπτει από το Θεώρημα 1 με εφαρμογή της αρχής του δυϊσμού. Σημειώνουμε επίσης πως στην περίπτωση αυτή το δυϊκό θεώρημα αποτελεί στην ουσία το αντίστροφο θεώρημα (αρχίζουμε από την ευθεία RST και προσδιορίζουμε το σημείο P).

Ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Desargues αποτελεί το *Θεώρημα Πάππου* (από τους τελευταίους μεγάλους Έλληνες μαθηματικούς (γεωμέτρης), έζησε στην Αλεξάνδρεια στα τέλη του 3ου-μέσα 4ου αιώνα μ.Χ. επί εποχής του Ρω-

μαίου αυτοκράτορα Διοκλητιανού, τα σημαντικότερα έργα του είναι τα σχόλιά του στα Στοιχεία του Ευκλείδη και η Μαθηματική Συναγωγή που αποτελεί μια συλλογή όλων των μέχρι τότε γνωστών μαθηματικών προτάσεων. Το θεώρημα φυσικά δεν είχε διατυπωθεί από τον Πάππο με αυτή τη μορφή):

Θεώρημα 2. *Έστω $A, B, C \in \varepsilon$ και $A', B', C' \in \varepsilon'$ δύο τυχαίες διατεταγμένες τριάδες συγγραμμικών (συνευθειακών) σημείων που βρίσκονται σε διαφορετικές ευθείες ε και ε' αντίστοιχα του προβολικού επιπέδου. Τότε τα σημεία τομής των διασταυρωμένων ενώσεων (δηλαδή τα τρία σημεία $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$ και $BC' \cap B'C$), είναι συνευθειακά.*

Απόδειξη: Χωρίς να περιορίζουμε την γενικότητα, υποθέτουμε πως τα σημεία A, B, B', C' είναι σε γενική θέση. (Εάν όχι, τότε δύο από τα απαιτούμενα τρία σημεία ταυτίζονται, οπότε το συμπέρασμα ισχύει). Από το θεώρημα 4.2.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$A = [1, 0, 0], B = [0, 1, 0], C' = [0, 0, 1], B' = [1, 1, 1].$$

Η ευθεία AB ορίζεται από τον διάστασης 2 υπόχωρο $\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$, συνεπώς το σημείο C που ευρίσκεται σε αυτή την ευθεία θα είναι της μορφής $C = [1, c, 0]$ και $c \neq 0$ αφού $A \neq C$. Ανάλογα, η ευθεία $B'C'$ δίδεται από την σχέση $x_0 = x_1$, οπότε $A' = [1, 1, a]$ όπου $a \neq 1$.

Η ευθεία BC' ορίζεται από τη σχέση $x_0 = 0$ ενώ η $B'C$ ορίζεται από τον υπόχωρο που παράγεται από τα $(1, 1, 1)$ και $(1, c, 0)$, συνεπώς το σημείο τομής $BC' \cap B'C$ αναπαρίσταται από το διάνυσμα που είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1, 1, 1)$ και $(1, c, 0)$ με $x_0 = 0$, δηλαδή από το διάνυσμα

$$(1, 1, 1) - (1, c, 0) = (0, 1 - c, 1).$$

Η ευθεία $C'A$ ορίζεται από τη σχέση $x_1 = 0$, συνεπώς το σημείο τομής $AC' \cap A'C$ αναπαρίσταται από το διάνυσμα

$$(1, c, 0) - c(1, 1, a) = (1 - c, 0, -ca).$$

Τέλος η ευθεία $B'A$ ορίζεται από τη σχέση $x_1 = x_2$, συνεπώς το σημείο τομής $AB' \cap A'B$ αναπαρίσταται από το διάνυσμα

$$(1, 1, a) + (a - 1)(0, 1, 0) = (1, a, a).$$

Όμως τότε

$$(c - 1)(1, a, a) + (1 - c, 0, -ca) + a(0, 1 - c, 1) = 0.$$

Συνεπώς τα τρία διανύσματα παράγουν έναν διανυσματικό υπόχωρο διάστασης 2 οπότε τα τρία σημεία ευρίσκονται στην ίδια προβολική ευθεία. $\square$

Σημείωση 3: Από την αρχή δυϊσμού προκύπτει άμεσα ότι ισχύει και το *δυϊκό Θεώρημα του Πάππου*: Αντί δύο τριάδων συνευθειακών σημείων, το δυϊκό θεώρημα ασχολείται με δύο τριάδες από τεμνόμενες ευθείες a, b, c που τέμνονται στο σημείο A και a', b', c' που τέμνονται στο σημείο A'. Ορίζουμε τα σημεία $B = a \cap c'$, $C = a \cap b'$, $B' = a' \cap b$ και $C' = a' \cap c$. Το δυϊκό θεώρημα του Πάππου λέγει πως οι ευθείες που ενώνουν τα σημεία $\{b \cap c', b' \cap c\}$, $\{c \cap a', c' \cap a\}$, $\{a \cap b', a' \cap b\}$, τέμνονται στο σημείο έστω P. Εξ ορισμού των σημείων B, B', C, C', οι δύο τελευταίες είναι $\{BC', B'C\}$ οι οποίες τέμνονται στο P. Τώρα το A βρίσκεται στην b και εξ ορισμού το ίδιο ισχύει για το B', συνεπώς η b' είναι η ευθεία AB'. Ανάλογα η $A'B$ είναι η ευθεία c'. Παρόμοια το A βρίσκεται στην ευθεία c και εξ ορισμού το ίδιο συμβαίνει για το σημείο C' οπότε η ευθεία AC' είναι η c και η ευθεία $A'C$ είναι η b'.

Συνεπώς η τομή των $\{AB', A'B\}$ είναι η $b \cap c'$ και η τομή των $\{AC', A'C\}$ είναι η $b' \cap c$. Το δυϊκό του θεωρήματος του Πάππου λέει πως η ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά διέρχεται από το σημείο P που είναι το σημείο τομής των ευθειών $\{BC', B'C\}$. Αυτά τα τρία σημεία είναι συνεπώς συνευθειακά κάτι που αποτελεί το αρχικό θεώρημα του Πάππου.

Μπορούμε τέλος να χρησιμοποιήσουμε τον δυϊσμό για να κατανοήσουμε τον χώρο των ευθειών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ (κάτι που το είδαμε στο μάθημα της Διαφορικής Γεωμετρίας αλλά με διαφορετικό τρόπο). Όταν περιγράψαμε το πραγματικό προβολικό επίπεδο $P(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2 \coprod P(\mathbb{R}^2)$, είδαμε ότι μια προβολική ευθεία διαφορετική από την επ΄ άπειρον προβολική ευθεία $P(\mathbb{R}^2)$ τέμνει το $\mathbb{R}^2$ κατά μήκος μιας κοινής ευθείας. Γνωρίζουμε όμως ότι οι ευθείες του $P(\mathbb{R}^3)$ βρίσκονται σε αντιστοιχία 1:1 με το δυϊκό προβολικό επίπεδο, συνεπώς βλέπουμε πως αρκεί να αφαιρέσουμε ένα μόνο σημείο από το δυϊκό προβολικό επίπεδο, το σημείο που δίδει την επ΄ άπειρον ευθεία, για να πάρουμε τον χώρο των ευθειών του $\mathbb{R}^2$. Συνεπώς στο μοντέλο της σφαίρας, αφαιρούμε τους πόλους και ταυτίζουμε τα αντιδιαμετρικά σημεία.

Πιο συγκεκριμένα, παραμετροποιούμε τη σφαίρα κατά τα γνωστά: $x_1 = \sin\theta \sin\phi, x_2 = \sin\theta\cos\phi, x_3 = \cos\theta$, οπότε αν αφαιρέσουμε τους πόλους τα πεδία ορισμού των παραμέτρων γίνονται $\theta \in (0, \pi)$ και $\phi \in [0, 2\pi)$. Η αντιδιαμετρική απεικόνιση είναι η $\theta \mapsto \pi - \theta$ και $\phi \mapsto \phi + \pi$, οπότε μπορούμε να ταυτίσουμε το χώρο των ευθειών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ με τα διατεταγμένα ζεύγη

$$(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times [0, \pi]$$

όπου ταυτίζουμε τα ζεύγη $(\theta, 0)$ με τα $(\pi - \theta, \pi)$ και αποκτάμε τη δέσμη Möbius.

Φύλλο Ασκήσεων Α.

(1). Έστω U_1, U_2 και U_3 υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 που ορίζονται από τις σχέσεις

$$x_0 = 0, x_0 + x_1 + x_2 = 0, 3x_0 - 4x_1 + 5x_2 = 0$$

αντίστοιχα. Βρείτε τις κορυφές του τριγώνου στον $P(\mathbb{R}^3)$ του οποίου οι πλευρές είναι οι προβολικές ευθείες $P(U_1)$, $P(U_2)$ και $P(U_3)$.

(2). Έστω U_1, U_2 διανυσματικοί υπόχωροι του V. Δείξτε ότι ο γραμμικός υπόχωρος

$$P(U_1 + U_2) \subseteq P(V)$$

αποτελείται από το σύνολο των σημείων των προβολικών ευθειών xy, όπου $x \in P(U_1)$ και $y \in P(U_2)$.

(3). Αποδείξτε ότι 3 ευθείες του $P(\mathbb{R}^4)$ έχουν άπειρο πλήθος εγκάρσιων γραμμών (ευθείες που τέμνουν και τις 3).

(4). Βρείτε τον προβολικό μετασχηματισμό $\tau : P(\mathbb{R}^2) \to P(\mathbb{R}^2)$ για τον οποίο

$$\tau([0,1]) = [1,0], \tau([1,0]) = [1,1], \tau([1,1]) = [0,1]$$

και δείξτε ότι $\tau^3 = id$.

(5). Έστω $T : V \to V$ αντιστρεπτός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι εάν το $v \in V$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T, τότε το $[v] \in P(V)$ αποτελεί σταθερό σημείο του προβολικού μετασχηματισμού τ που ορίζεται μέσω του T. Αποδείξτε ότι κάθε προβολικός μετασχηματισμός του $P(\mathbb{R}^3)$ έχει ένα σταθερό σημείο.

(6). Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης 3, $\{v_1, v_2, v_3\}$ μια βάση αυτού και $A, B, C \in P(V)$ τρία σημεία με ομογενείς συντεταγμένες (ως προς τη δοσμένη βάση)

$$A = [2,1,0], B = [0,1,1], C = [-1,1,2].$$

Βρείτε τις συντεταγμένες ως προς τη δυϊκή βάση των τριών σημείων στον δυϊκό προβολικό χώρο $P(V^*)$ τα οποία αναπαριστούν τις ευθείες AB, BC, AC.

6 Καμπύλες β′ βαθμού (Quadrics)

Η προβολική γεωμετρία των καμπυλών β′ βαθμού (τετραγωνικές καμπύλες ή απλά τετραγωνικές), αποτελεί την γεωμετρική εικόνα του κομματιού της γραμμικής άλγεβρας που ασχολείται με τις συμμετρικές διγραμμικές μορφές (που με τη σειρά τους αποτελούν τη γενίκευση του γνωστού Ευκλείδειου εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$). Η έννοια της καμπύλης είναι κάπως ευρύτερη εδώ όπως θα δούμε, δηλαδή δεν αναφέρεται αποκλειστικά σε γεωμετρικά αντικείμενα διάστασης 1 (καμπύλες), αλλά ουσιαστικά σε υπερεπιφάνειες κάποιου προβολικού χώρου.

6.1 Διγραμμικές Μορφές

Ορισμός 1. Έστω V διανυσματικός χώρος με σώμα $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης $dim_{\mathbb{F}}V = n+1$. Μια *συμμετρική διγραμμική μορφή* B στον V είναι μια απεικόνιση $B : V \times V \to \mathbb{F}$ τέτοια ώστε:
(i) $B(v,w) = B(w,v)$ (η ιδιότητα αυτή αναφέρεται στο χαρακτηρισμό συμμετρική)
(ii) $B(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 B(v_1,w) + \lambda_2 B(v_2,w)$, $\forall v,w \in V$ και $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$.
Απαιτούμε η B να είναι γραμμική μόνο στην αριστερή μεταβλητή οπότε λόγω της **(i)** θα είναι γραμμική και στη δεξιά μεταβλητή.

Η συμμετρική διγραμμική μορφή B θα λέγεται *μη-εκφυλισμένη* αν ισχύει $B(v,w) = 0\ \forall w \in V \Rightarrow v = 0$.

Το κλασικό παράδειγμα μιας συμμετρικής διγραμμικής μορφής είναι το γνωστό *εσωτερικό γινόμενο* των διανυσμάτων του χώρου $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$. Αν επιλέξουμε ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων και αν ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων τα διανύσματα έχουν συντεταγμένες $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3)$, τότε $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Μέσω του εσωτερικού γινομένου ορίζονται στη συνέχεια τα μήκη

$$|\overrightarrow{x}| := \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}$$

και οι γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων

$$\cos(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) := \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|}$$

Έστω $T : V \to V$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός. Ο T μετασχηματίζει μια συμμετρική διγραμμική μορφή B όπως η παραπάνω σε μια άλλη

συμμετρική διγραμμική μορφή B^T που ορίζεται ως εξής:

$$B^T(v,w) = B(Tv,Tw).$$

Αν επιλέξουμε μια βάση $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ του V, τότε

$$v = \sum_{i=0}^{n} x_i v_i,$$

$$w = \sum_{i=0}^{n} y_i v_i,$$

οπότε

$$B(v,w) = \sum_{i,j=0}^{n} B(v_i, v_j) x_i y_j,$$

συνεπώς η B ορίζει ένα *συμμετρικό πίνακα* $B_{ij} = B(v_i, v_j)$. Ο συμμετρικός πίνακας B_{ij} έχει μη-μηδενική ορίζουσα εάν και μόνο εάν η συμμετρική διγραμμική μορφή B είναι μη-εκφυλισμένη.

Εάν το διάνυσμα $v \in V$ ως προς τη βάση $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ έχει συντεταγμένες $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$, τότε η διγραμμική μορφή B καθορίζεται από την *τετραγωνική μορφή*

$$B(v,v) = \sum_{i,j=0}^{n} B_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

Ο καθορισμός της διγραμμικής μορφής μέσω της τετραγωνικής μορφής ισχύει μόνο αν το σώμα $\mathbb{F}$ δεν έχει χαρακτηριστική 2, δηλαδή αν $1 + 1 \neq 0$, όπου 0 και 1 τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιαμού στο σώμα αντίστοιχα. Σημειώνουμε πως τόσο το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών όσο και το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών δεν έχουν χαρακτηριστική 2.

Εάν προσθέσουμε δύο συμμετρικές διγραμμικές μορφές ή πάρουμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό μιας συμμετρικής διγραμμικής μορφής επί κάποιο στοιχείο του σώματος, θα πάρουμε μια άλλη συμμετρική διγραμμική μορφή, συνεπώς το σύνολο των συμετρικών διγραμμικών μορφών επί του V αποτελεί διανυσματικό χώρο (με το ίδιο σώμα όπως ο V) με διάσταση $(n+1)(n+2)/2$ ($\dim V = n+1$). Ο διανυσματικός αυτός χώρος είναι ισόμορφος με τον χώρο των συμμετρικών $(n+1) \times (n+1)$ πινάκων.

Εάν αλλάξουμε βάση στον V

$$w_i = \sum_{j=0}^{n} P_{ji} v_j,$$

τότε

$$B(w_i, w_j) = B(\sum_{k=0}^{n} P_{ki} v_k, \sum_{l=0}^{n} P_{lj} v_l) = \sum_{k,l=0}^{n} P_{ki} B(v_k, v_l) P_{lj},$$

που σημαίνει ότι ο πίνακας $B_{ij} = B(v_i, v_j)$ σε αλλαγή βάσης μετασχηματίζεται μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας

$$B' = P^T B P.$$

Το παρακάτω Θεώρημα θεωρείται γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα και θα μας είναι χρήσιμο σε όσα θα ακολουθήσουν:

Θεώρημα 1. Έστω $B(v, v)$ μια τετραγωνική μορφή σε ένα διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης $\dim V = n$ με σώμα $\mathbb{F}$ τους πραγματικούς ή τους μιγαδικούς αριθμούς. Τότε:
(i) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, τότε υπάρχει μια βάση $\{v_1, ..., v_n\}$ του V ως προς την οποία εάν $v = \sum_i \lambda_i v_i$, η τετραγωνική μορφή μπορεί να γραφεί ως

$$B(v, v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2$$

όπου $m = rank(B_{ij})$ η *τάξη* του συμμετρικού πίνακα B_{ij} και προφανώς $m \leq dim_{\mathbb{C}} V$.
(ii) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, τότε υπάρχει μια βάση του V ως προς την οποία η τετραγωνική μορφή μπορεί να γραφεί ως

$$B(v, v) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 - \sum_{i=j}^{q} \lambda_j^2.$$

Σημείωση 1. Η τετραγωνική μορφή (ή ισοδύναμα η συμμετρική διγραμμική μορφή) είναι μη-εκφυλισμένη εάν και μόνο εάν $m = n = p + q$.

Απόδειξη: Συμπληρώνουμε το τετράγωνο σημειώνοντας πως αλλαγή βάσης σημαίνει αλλαγή των συντεταγμένων x_i του v μέσω ενός αντιστρεπτού γραμμικού μετασχηματισμού. Γράφουμε την μορφή ως προς την αρχική βάση

$$B(v, v) = \sum_{i,j}^{n} B_{ij} x_i x_j$$

και στη συνέχεια ρωτάμε: υπάρχει όρος $B_{ii} \neq 0$; Εάν όχι, τότε δημιουργούμε έναν. Εάν ο συντελεστής του $x_i x_j$ δεν είναι μηδέν, τότε θέττοντας

$y_i = (x_i + x_j)/2$ και $y_j = (x_i - x_j)/2$, έχουμε $x_i x_j = y_i^2 - y_j^2$ οπότε παίρνουμε έναν όρο $B'_{ii} \neq 0$.

Εάν υπάρχει όρος $B_{ii} \neq 0$, τότε παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{B_{ii}}(B_{i1}x_1 + ... + B_{in}x_n) = B_{ii}x_i^2 + 2\sum_{k \neq i} B_{ik}x_i x_k + R,$$

όπου το R περιέχει τα x_k με $k \neq i$. Έτσι, εάν

$$y_i = B_{i1}x_1 + ... + B_{in}x_n$$

τότε

$$B(v,v) = \frac{1}{B_{ii}}y_i^2 + B_1,$$

όπου το B_1 αποτελεί τετραγωνική μορφή ως προς τις $n-1$ μεταβλητές $x_k, k \neq i$.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για να βρούμε μια βάση τέτοια ώστε εάν το v έχει συντεταγμένες $y_1, ..., y_n$, τότε

$$B(v,v) = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i^2.$$

Εάν το σώμα είναι το $\mathbb{C}$ μπορούμε να γράψουμε $\lambda_i = \sqrt{c_i}y_i$ οπότε παίρνουμε ένα άθροισμα τετραγώνων ενώ εάν το σώμα είναι το $\mathbb{R}$ θέττουμε $\lambda_i = \sqrt{|c_i|}y_i$ οπότε παίρνουμε την απαιτούμενη έκφραση. $\square$

Παράδειγμα 1:
Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^3$

$$B(v,v) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

Θέτουμε

$$y_1 = (x_1 + x_2)/2, y_2 = (x_1 - x_2)/2$$

και παίρνουμε

$$B(v,v) = y_1^2 - y_2^2 + x_3(2y_1).$$

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο

$$B(v,v) = (y_1 + x_3)^2 - y_2^2 - x_3^2$$

έτσι ώστε εάν $z_1 = y_1 + x_3, z_2 = y_2, y_3 = x_3$, παίρνουμε $p = 1, q = 2$.

Ορισμός 2. Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $P(V)$ ο αντίστοιχος προβολικός χώρος. Μια *τετραγωνική καμπύλη* (ή *καμπύλη β΄ βαθμού*, quadric), στον $P(V)$ είναι το σύνολο των σημείων του προβολικού χώρου των οποίων τα αντιπροσωπευτικά διανύσματα ικανοποιούν τη σχέση $B(v,v)=0$, όπου B μια συμμετρική διγραμμική μορφή του V. Μια τετραγωνική λέγεται μη-εκφυλισμένη εάν η συμμετρική διγραμμική μορφή B είναι μη-εκφυλισμένη. Η διάσταση της τετραγωνικής είναι $\dim P(V)-1$ (ο όρος καμπύλη χρησιμοποιείται κάπως ευρύτερα).

Σημείωση 2. Επειδή για τις τετραγωνικές μορφές ισχύει $B(\lambda v,\lambda v)=\lambda^2 B(v,v)$, έπεται ότι το σύνολο των σημείων της τετραγωνικής καμπύλης είναι ανεξάρτητο από την επιλογή αντιπροσωπευτικών διανυσμάτων.

Μια τετραγωνική στην προβολική ευθεία αποτελείται από το κενό σύνολο ή ένα ζεύγος σημείων. Μια τετραγωνική στο προβολικό επίπεδο, δηλαδή μια τετραγωνική διάστασης 1, λέγεται *κωνική*.

Έστω $T:V\to V$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός και $\tau: P(V)\to P(V)$ ο αντίστοιχος προβολικός μετασχηματισμός. Ο προβολικός μετασχηματισμός τ απεικονίζει μια τετραγωνική καμπύλη σε μια άλλη τετραγωνική καμπύλη διότι

$$B(v,v)=B(T^{-1}Tv,T^{-1}Tv)=B^{T^{-1}}(Tv,Tv)$$

μιας και $B^{T^{-1}}(Tv,Tv)=0$ εάν $B(v,v)=0$.

Σημείωση 3. Από το Θεώρημα 6.1.1.(i) προκύπτει ότι κάθε μιγαδική τετραγωνική καμπύλη μέσω ενός προβολικού μετασχηματισμού είναι ισοδύναμη με μια τετραγωνική καμπύλη της μορφής

$$B(v,v)=\lambda_0^2+\lambda_1^2+...+\lambda_r^2.$$

Η παρακάτω πρόταση ουσιαστικά αποτελεί το αντίστροφο της Σημείωσης 2 παραπάνω στην περίπτωση που το σώμα είναι οι μιγαδικοί αριθμοί:

Πρόταση 1. *Αν δύο συμμετρικές διγραμμικές μορφές B και B' σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης $dim_{\mathbb{C}}V=n+1$ ορίζουν την ίδια τετραγωνική καμπύλη στον προβολικό χώρο $P(V)$, τότε $B=\lambda B'$, για κάποιο $\lambda\in\mathbb{C}$.*

Απόδειξη: Αν $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, τότε από το Θεώρημα 6.1.1.(i) μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάποια βάση έστω $\{v_0,v_1,...,v_n\}$ του V ισχύει

$$0 = B'(v,v) = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + ... + \lambda_r^2 \tag{4}$$

όπου το διάνυσμα $v \in V$ ως προς τη βάση $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ έχει συντεταγμένες $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$, με $\lambda_i \in \mathbb{C}$ για $i = 0, 1, ..., n$, ενώ

$$0 = B(v,v) = \sum_{i,j=0}^{n} B_{ij}\lambda_i\lambda_j \tag{5}$$

διότι εν γένει δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Θεώρημα 6.1.1.(i) ικανοποιείται ταυτόχρονα για τη B και τη B' ως προς την *ίδια βάση*.

[*Παραπομπή:* υπενθυμίζουμε το εξής σχετικό από τη θεωρία πινάκων: δύο τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες A, B *διαγωνιοποιούνται ταυτόχρονα εάν και μόνο εάν μετατίθενται*, δηλαδή εάν $AB = BA$. Εάν οι πίνακες διαγωνιοποιούνται ταυτόχρονα αυτό σημαίνει πως θα έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα, συνεπώς οι πίνακες αποκτούν διαγώνια μορφή ως προς την ίδια βάση που αποτελείται από τα κοινά ιδιοδιανύσματα].

Επιλέγουμε τα αντιπροσωπευτικά διανύσματα $v_{\pm i} \in V$ των σημείων της τετραγωνικής καμπύλης που ορίζεται από την τετραγωνική μορφή $B'(v,v) = 0$ τα οποία (αντιπροσωπευτικά διανύσματα) ως προς τη βάση $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ του V έχουν συντεταγμένες $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) = (1, \pm i, 0, ..., 0)$ οι οποίες προφανώς ικανοποιούν τη σχέση 4. Αν αντικαταστήσουμε τις συντεταγμένες αυτές στη σχέση 5 θα πάρουμε:

$$(+i) : B_{11} - B_{22} + 2iB_{12} = 0$$

$$(-i) : B_{11} - B_{22} - 2iB_{12} = 0$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $B_{11} = B_{22}$ και $B_{12} = 0$. Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία μετατοπίζοντας διαδοχικά τη *θέση* της συντεταγμένης $\pm i$ και παίρνουμε $B_{11} = B_{22} = ... = B_{rr}$ και $B_{ij} = 0$ για $i < j \leq r$. Αν $r < n$ παίρνουμε διανύσματα με συντεταγμένες $(0, 0, ..., \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, ..., \lambda_n)$ οπότε αποκτάμε $B_{ij} = 0$ αν i ή $j \geq r$ (προφανώς $i, j, r \leq n+1$). $\square$

Σημείωση 4. Στην περίπτωση που το σώμα είναι οι πραγματικοί αριθμοί, δεν υπάρχει αντίστοιχη πρόταση με την παραπάνω (που να αποτελέι το αντίστροφο της Σημείωσης 2), διότι εάν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ και η B είναι θετικά ορισμένη, τότε $B(v,v) = 0 \Rightarrow v = 0$, οπότε η τετραγωνική που ορίζεται είναι το κενό σύνολο. Αυτός είναι ένας λόγος που βολεύει η χρήση μιγαδικών αριθμών.

6.2 Παραδείγματα Καμπυλών β΄ βαθμού

Πριν αναφερθούμε στα Παραδείγματα, είναι σκόπιμο να υπενθυμίσουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι οι συμμετρικές διγραμμικές μορφές λέγονται και *μετρικές* (στη γεωμετρική ορολογία, συνήθως στη γεωμετρία οι μετρικές απαιτούμε να είναι και θετικά (ημι-)ορισμένες για να είναι τα μήκη που μετράμε θετικοί αριθμοί, αλλιώς λέγονται ψευδομετρικές). Ένας ισομορφισμός που επιπρόσθετα διατηρεί μια συμμετρική διγραμμική μορφή (ή μετρική) αναλλοίωτη λέγεται *ισοτιμία* στην ορολογία των πινάκων (ή *ισομετρία* στη γεωμετρική ορολογία-για παράδειγμα οι στροφές στο επίπεδο και στο χώρο αποτελούν κλασικά παραδείγματα ισομετριών διότι δεν μεταβάλλουν τα μήκη των διανυσμάτων).

Στους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους (πεπερασμένης διάστασης), από το *Θεώρημα Αδράνειας του Sylvester*, που ουσιαστικά είναι Πόρισμα του Θεωρήματος 6.1.1.(ii), γνωρίζουμε πως η κατηγοριοποίηση των μη-εκφυλισμένων συμμετρικών διγραμμικών μορφών ως προς τη σχέση ισοδυναμίας της ισοτιμίας γίνεται μέσω της αναλλοίωτης ποσότητας της *υπογραφής* που είναι ίση με την διαφορά $p - q$ του Θεωρήματος 6.1.1.(ii) (στη γενική περίπτωση που η συμμετρική διγραμμική μορφή δεν είναι απαραίτητα μη-εκφυλισμένη, απαιτείται τόσο η τάξη όσο και η υπογραφή).

Ας δούμε στη συνέχεια ορισμένα παραδείγματα.

1. Θεωρούμε ως σώμα τους μιγαδικούς αριθμούς. Έστω $dim_{\mathbb{C}}V = 2$ οπότε $dim_{\mathbb{C}}P(V) = 1$ (μιγαδική προβολική ευθεία). Από το Θεώρημα 6.1.1.**(i)** και τη Σημείωση 6.1.3 προκύπτει πως κάθε μη-εκφυλισμένη τετραγωνική καμπύλη της μιγαδικής προβολικής ευθείας είναι ισοδύναμη μέσω ενός προβολικού μετασχηματισμού με το σύνολο των σημείων με ομογενείς συντεταγμένες (λ_0, λ_1), όπου $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$, που ικανοποιούν τη σχέση

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 0$$

δηλαδή

$$\lambda_0 = \pm i\lambda_1$$

Αποτελείται συνεπώς από 2 μόλις σημεία, αυτά με ανομογενείς συντεταγμένες $\pm i$. Συνεπώς, υπάρχει μία και μοναδική προβολική κλάση μη-εκφυλισμένων τετραγωνικών καμπυλών στη μιγαδική προβολική ευθεία αποτελούμενη από 2 μόνο σημεία (κάθε άλλη μη-εκφυλισμένη τετραγωνική καμπύλη συνδέεται μέσω κάποιου προβολικού μετασχηματισμού με αυτήν).

1΄. Ας δούμε τι συμβαίνει στην πραγματική προβολική ευθεία $dim_{\mathbb{R}}P(V) = 1$, συνεπώς $dim_{\mathbb{R}}V = 2$. Υπάρχουν μόνο **δύο** ισότιμες κλάσεις μη-εκφυλισμένων

συμμετρικών διγραμμικών μορφών, μία με υπογραφή ± 2 και μία με υπογραφή 0.

Φανερά, από την πραγματική συμμετρική διγραμμική μορφή με υπογραφή έστω $+2$, προκύπτει η τετραγωνική καμπύλη με εξίσωση έστω

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 0$$

όπου $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ομογενείς συντεταγμένες στην πραγματική προβολική ευθεία. Η παραπάνω αλγεβρική εξίσωση δεν επιδέχεται μη-μηδενικές *πραγματικές* ρίζες, συνεπώς η εν λόγω πραγματική μη-εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή δεν δίδει τετραγωνική καμπύλη στην *πραγματική προβολική ευθεία*. (Στην περίπτωση που η υπογραφή είναι -2 θα έχουμε την τετραγωνική καμπύλη με εξίσωση

$$-\lambda_0^2 - \lambda_1^2 = 0$$

που είναι ίδια με την προηγούμενη).

Ας δούμε τη δεύτερη περίπτωση, την καμπύλη που προκύπτει από την πραγματική συμμετρική διγραμμική μορφή με υπογραφή 0, η οποία έχει εξίσωση

$$\lambda_0^2 - \lambda_1^2 = 0$$

όπου $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ ομογενείς συντεταγμένες. Αν επιλέξουμε $\lambda_0 \neq 0$ και πάμε σε ανομογενείς συντεταγμένες $x_1 := \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, τότε η εξίσωση

$$\lambda_0^2 - \lambda_1^2 = 0$$

γίνεται

$$x_1^2 = 1$$

που έχει λύση δύο σημεία με ανομογενείς συντεταγμένες ± 1.

Γενικά, *κάθε μη-εκφυλισμένη τετραγωνική καμπύλη του προβολικού επιπέδου ονομάζεται κωνική καμπύλη* (conic).

2. Θεωρούμε ως σώμα τους μιγαδικούς αριθμούς. Έστω $dim_{\mathbb{C}} V = 3$ οπότε $dim_{\mathbb{C}} P(V) = 2$ (μιγαδικό προβολικό επίπεδο). Κάθε κωνική του μιγαδικού προβολικού επιπέδου είναι ισοδύναμη (μέσω ενός προβολικού μετασχηματισμού), με ανάλογο σκεπτικό όπως στο προηγούμενο αντίστοιχο παράδειγμα, με το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την αλγεβρική εξίσωση

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0$$

όπου $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ομογενείς συντεταγμένες του μιγαδικού προβολικού επιπέδου.

2′. Ας μελετήσουμε τώρα τις κωνικές στο πραγματικό προβολικό επίπεδο.

Στην περίπτωση συνεπώς που $dim_{\mathbb{R}}V = 3$, υπάρχουν μόνο **δύο** ισότιμες κλάσεις μη-εκφυλισμένων συμμετρικών διγραμμικών μορφών, μία με υπογραφή ± 3 και μία με υπογραφή ± 1.

Φανερά, από την πραγματική συμμετρική διγραμμική μορφή με υπογραφή έστω $+3$, προκύπτει η κωνική του προβολικού επιπέδου με εξίσωση

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0$$

όπου $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ομογενείς συντεταγμένες στο πραγματικό προβολικό επίπεδο. Η παραπάνω αλγεβρική εξίσωση δεν επιδέχεται μη-μηδενικές *πραγματικές* ρίζες, συνεπώς η εν λόγω κωνική δεν υπάρχει στο *πραγματικό προβολικό επίπεδο*.

Ας δούμε τη δεύτερη περίπτωση, την κωνική που προκύπτει από την πραγματική συμμετρική διγραμμική μορφή με υπογραφή έστω -1, η οποία έχει εξίσωση

$$\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0$$

όπου $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ομογενείς συντεταγμένες του πραγματικού προβολικού επιπέδου. Αν επιλέξουμε $\lambda_0 \neq 0$ και πάμε σε ανομογενείς συντεταγμένες

$$x_1 := \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

και

$$x_2 := \frac{\lambda_2}{\lambda_0},$$

τότε η εξίσωση

$$\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0$$

γίνεται

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

που ως γνωστόν αποτελεί την εξίσωση (μοναδιαίου) *κύκλου* στο πραγματικό προβολικό επίπεδο.

6.3 Περαιτέρω Παραδείγματα Κωνικών στο Πραγματικό Προβολικό Επίπεδο

Θα μελετήσουμε αναλυτικότερα κωνικές στον $P(\mathbb{R}^3)$. Υπενθυμίζουμε ότι $P(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2 \cup P(\mathbb{R}^2)$. Θεωρούμε κωνικές στο $P(\mathbb{R}^3)$ που είναι μη-κενές και θεωρούμε την τομή αυτών με το $\mathbb{R}^2 \subset P(\mathbb{R}^3)$ που ορίζεται από τα σημεία $[x_0, x_1, x_2]$ με $x_0 \neq 0$. Χρησιμοποιούμε ανομογενείς συντεταγμένες $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$, οπότε η τομή των κωνικών με το επίπεδο αυτό έχει εξίσωση

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{01}x + 2b_{02}y + b_{00} = 0.$$

1. Θεωρούμε την υπερβολή $xy = 1$. Στο $P(\mathbb{R}^3)$ ορίζεται από την εξίσωση

$$x_1x_2 - x_0^2 = 0$$

και η επ΄ άπειρον ευθεία $x_0 = 0$ την τέμνει στα σημεία όπου $x_1x_2 = 0$, δηλαδή στα δύο σημεία $[0, 1, 0]$ και $[0, 0, 1]$.

Ας την δούμε διαφορετικά: από το Θεώρημα 6.1.1 ξαναγράφουμε την εξίσωση ως

$$[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)]^2 - [\frac{1}{2}(x_1 - x_2)]^2 - x_0^2 = 0$$

και εάν $x_1 + x_2 \neq 0$ θέτουμε

$$y_1 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}, y_2 = \frac{2x_0}{x_1 + x_2}$$

και η κωνική τέμνει το κομμάτι $\mathbb{R}^2 \subset P(\mathbb{R}^3)$ (το συμπλήρωμα της ευθείας $x_1 + x_2 = 0$) κατά μήκος του κύκλου

$$y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Η αρχική επ΄ άπειρον ευθεία $x_0 = 0$ τέμνει τον κύκλο στα σημεία $y_2 = 0$. Συνεπώς ένας προβολικός μετασχηματισμός μας επιτρέπει να δούμε τους δύο κλάδους της υπερβολής ως τα δύο ημικύκλια πάνω και κάτω από την επ΄ άπειρον ευθεία.

2. Θεωρούμε την παραβολή $y = x^2$. Η εξίσωσή της σε ομογενείς συντεταγμένες είναι

$$x_2x_0 = x_1^2$$

και η επ΄ άπειρον ευθεία $x_0 = 0$ την τέμνει στο σημείο $[0, 0, 1]$. Στο προβολικό επίπεδο επίσης φαίνεται ως κύκλος αλλά ο ένας κλάδος της παραβολής αποτελεί το συμπλήρωμα του σημείου όπου η επ΄ άπειρον ευθεία τέμνει τον κύκλο εφαπτομενικά. Άρα οι τρεις κωνικές τομές του επιπέδου (έλλειψη, υπερβολή, παραβολή) γίνονται κύκλοι όταν προσθέσουμε τα επ΄ άπειρον σημεία για να τις μεταφέρουμε στο πραγματικό προβολικό επίπεδο.

6.4 Γενικευμένες Κωνικές

Είδαμε στο Παράδειγμα 3.6.2 ότι $P(\mathbb{R}^2) \simeq S^1$, που σημαίνει πως υπάρχει μια απεικόνιση που είναι 1-1 και επί (τουλάχιστον) μεταξύ των σημείων της προβολικής ευθείας και του κύκλου. Επίσης στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πως μια κωνική τομή του πραγματικού προβολικού επιπέδου αποτελεί επίσης κύκλο. Δηλαδή τόσο η πραγματική προβολική ευθεία όσο και οι κωνικές τομές του πραγματικού προβολικού επιπέδου είναι ομοιομορφικά με τον κύκλο. Τα παραπάνω γενικεύονται: όπως μας λέει το παρακάτω Θεώρημα, κάθε μη-εκφυλισμένη κωνική (και όχι μόνο ο κύκλος), είναι σε αντιστοιχία 1-1 και επί με την προβολική ευθεία για *οποιοδήποτε σώμα* $\mathbb{F}$:

Θεώρημα 1. *Έστω $\mathbb{F}$ τυχαίο σώμα και C μια μη-εκφυλισμένη κωνική στο προβολικό επίπεδο $P(V)$, όπου V διανυσματικός χώρος με σώμα το $\mathbb{F}$ με διάσταση $dim_{\mathbb{F}}V = 3$ (οπότε $dim_{\mathbb{F}}P(V) = 2$). Έστω $x \in C$ τυχαίο σημείο της κωνικής και έστω $P(U) \subseteq P(V)$ με $dim_{\mathbb{F}}P(U) = 1$ μια προβολική ευθεία που δεν περιέχει το σημείο x, δηλαδή $x \notin P(U)$. Τότε υπάρχει απεικόνιση $\alpha : P(U) \to C$ που είναι 1-1 και επί, τέτοια ώστε τα σημεία x, y και $\alpha(y)$ να είναι συνευθειακά, όπου $y \in P(U)$ ένα τυχαίο σημείο της προβολικής ευθείας $P(U)$.*

Σημείωση 1: Το Θεώρημα αυτό αποτελεί την προβολική έκδοση και γενίκευση της στερεογραφικής προβολής (στην διάσταση 1) για οποιοδήποτε σώμα.

Απόδειξη: Έστω ότι η C δίδεται από μια μη-εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή B του V και έστω $v_0 \in V$ ένα αντιπροσωπευτικό διάνυσμα του σημείου $P(V) \ni x \in C$, που σημαίνει ότι $B(v_0, v_0) = 0$.

Έστω $u \in V$ ένα αντιπροσωπευτικό διάνυσμα για το σημείο $P(V) \ni y \in P(U)$ της (προβολικής) ευθείας $P(U)$ του προβολικού επιπέδου $P(V)$. Αφού $x \notin P(U)$, τα διανύσματα v_0 και u του V είναι γραμμικά ανεξάρτητα, συνεπώς παράγουν ένα διανυσματικό υπόχωρο $V_u \leq V$ με $dim_{\mathbb{F}}V_u = 2$. Προφανώς τα διανύσματα $\{v_0, u\}$ αποτελούν και μια βάση του διανυσματικού υπόχωρου $V_u \leq V$. Συμβολίζουμε με $B|_{V_u}$ τον περιορισμό της B στο διανυσματικό υπόχωρο $V_u \leq V$ και επεκτείνουμε τη βάση $\{v_0, u\}$ του V_u σε μια βάση $\{v_0, u, u'\}$ του V (όπου u' κάποιο διάνυσμα του V που να είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα αντιπροσωπευτικά διανύσματα v_0 και u). Εάν η $B|_{V_u}$ ήταν ταυτοτικά μηδέν, τότε ως προς τη βάση $\{v_0, u, u'\}$ του V, εύκολα διαπιστώνει κάποιος εκτελώντας μερικές απλές πράξεις [χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κωνικής και τη σχέση αναπαράστασης μιας συμμετρικής διγραμμικής μορφής σε μορφή συμμετρικού πίνακα με την επιλογή μιας βάσης $B_{ij} = B(v_i, v_j)$], ότι η $B|_{V_u}$ θα αναπαρίστατο

από ένα *συμμετρικό* 3×3 πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

(όπου με '$*$' συμβολίζουμε τυχαία στοιχεία του σώματος $\mathbb{F}$), ο οποίος πίνακας θα είχε μηδενική ορίζουσα, κάτι που είναι *άτοπο*, διότι υποθέσαμε ότι η B είναι μη-εκφυλισμένη. Άρα η $B|_{V_u}$ *δεν* είναι ταυτοτικά μηδέν.

Συνεπώς ως προς τη βάση $\{v_0, u\}$ του V_u, η $B|_{V_u}$ θα είναι της μορφής

$$B(\lambda_0 v_0 + \lambda_1 u, \lambda_0 v_0 + \lambda_1 u) = \tag{6}$$
$$\lambda_0\lambda_0 B(v_0, v_0) + \lambda_0\lambda_1 B(v_0, u) + \lambda_1\lambda_0 B(u, v_0) + \lambda_1\lambda_1 B(u, u) = \tag{7}$$
$$2\lambda_0\lambda_1 B(v_0, u) + \lambda_1^2 B(u, u) = \lambda_0\lambda_1\beta + \lambda_1^2\gamma \tag{8}$$

όπου θέσαμε $\beta = 2B(v_0, u)$ και $\gamma = B(u, u)$. Φανερά, αφού $dim_{\mathbb{F}} V_u = 2$, έπεται πως $dim_{\mathbb{F}} P(V_u) = 1$, οπότε $P(V_u) = xy$ είναι η ευθεία του προβολικού επιπέδου που ενώνει τα σημεία x, y.

Η κωνική C τέμνει την ευθεία $P(V_u)$ στα σημεία x και $\alpha(y)$.

Οι ομογενείς συντεταγμένες (ως προς τη βάση $\{v_0, u\}$ του V_u), των σημείων x, y και $\alpha(y)$ είναι $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$ και $\alpha(y) = (\gamma, -\beta)$. Οι ομογενείς συντεταγμένες $(1, 0)$ του σημείου x προκύπτουν από το γεγονός ότι το αντιπροσωπευτικό διάνυσμα v_0 του σημείου x έχει συντεταγμένες $(1, 0)$ ως προς τη βάση $\{v_0, u\}$ του V_u. Οι ομογενείς συντεταγμένες $(0, 1)$ του σημείου y προκύπτουν από το γεγονός ότι το αντιπροσωπευτικό διάνυσμα u του σημείου y έχει συντεταγμένες $(0, 1)$ ως προς τη βάση $\{v_0, u\}$ του V_u. Οι ομογενείς συντεταγμένες του σημείου $\alpha(y)$ προκύπτουν από την αμέσως προηγούμενη παράγραφο.

Τα σημεία αυτά είναι καλά ορισμένα διότι έχουν μη-μηδενικές συντεταγμένες. Για τα σημεία x και y αυτό είναι προφανές. Για το σημείο $\alpha(y)$ έχουμε $\beta, \gamma \neq 0$. Αυτό προκύπτει διότι το σημείο με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα $\gamma v_0 - \beta u$ ικανοποιεί τη σχέση $B(\gamma v_0 - \beta u, \gamma v_0 - \beta u) = 0$, λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση 8.

Παρατηρούμε ότι αν $\beta = 0$, $\alpha(y) = (\gamma, 0) = x$ διότι το σημείο $(1, 0)$ και $(\gamma, 0)$ διαφέρουν κατά βαθμωτό πολλαπλάσιο, άρα στον προβολικό χώρο αναπαριστούν το ίδιο σημείο. Ο ορισμός της απεικόνισης $\alpha : P(U) \to C$ φαίνεται

παραπάνω. Είναι απεικόνιση 1-1 και επί στα σημεία $z \in C$ με $z \neq x$ διότι η ευθεία που ενώνει το σημείο x και το σημείο z συναντά την ευθεία $P(U)$ σε ένα σημείο y. Αφού αυτό το σημείο είναι μοναδικό, η απεικόνιση α είναι 1-1 στο σύνολο $C - \{x\}$.

Από τη σχέση 8 έχουμε ότι $\alpha(y) = x \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow B(v_0, u) = 0$. Αφού η B είναι μη-εκφυλισμένη στο V_u (στην πραγματικότητα αυτό ισχύει και σε όλο το V), το σύνολο των $u \in V_u$ που ικανοποιούν την παραπάνω γραμμική εξίσωση $\alpha(y) = x \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow B(v_0, u) = 0$ αποτελούν μονοδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο του V_u και συνεπώς υπάρχει μοναδικό σημείο y που πηγαίνει στο x. Συνεπώς η απεικόνιση α είναι αμφεικόνιση. $\square$

Σημείωση 2: Το θεώρημα μπορεί να εξετασθεί και υπό το πρίσμα του δυϊσμού: η ευθεία x^0 του $P(V^*)$ που είναι δυϊκή του σημείου x. Κάθε σημείο $z \in x^0$ ορίζει μια ευθεία $z^0 \in P(V)$ που τέμνει την κωνική C σε ένα δεύτερο σημείο $\alpha(z)$. Αυτό που κάνουμε είναι να πάρουμε τη σύνθεση αυτής της φυσικής αμφεικόνισης με τον προβολικό μετασχηματισμό $x^0 \to P(U)$ που ορίζεται ως $z \mapsto z^0 \cap P(U)$.

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε την κωνική

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

παίρνουμε $x = [1, 0, 1]$ και την ευθεία $P(U)$ που ορίζεται από την σχέση $x_0 = 0$ (η κωνική, το σημείο και η ευθεία ορίζονται για οποιοδήποτε σώμα διότι έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο τα 0, 1). Ένα σημείο $y \in P(U)$ είναι της μορφής $y = [0, 1, t]$ ή $[0, 0, 1]$ και η απεικόνιση α είναι

$$\alpha([0,1,t]) = [B((0,1,t),(0,1,t))(1,0,1) - 2B((1,0,1),(0,1,t))(0,1,t)] = [1-t^2, 2t, 1+t^2]$$

ή $\alpha([0, 0, 1]) = [-1, 0, 1]$.

6.5 Μια Εφαρμογή από την Αλγεβρική Γεωμετρία

Ως μια εφαρμογή του Θεωρήματος 6.4.1 θα προσδιορίσουμε τους *Πυθαγόρειους Αριθμούς*.

Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, δηλαδή ως σώμα θεωρούμε το σώμα των ρητών (κλασματικών) αριθμών. Θεωρούμε τον προβολικό χώρο $P(\mathbb{Q}^3)$ με $dim_{\mathbb{Q}} P(\mathbb{Q}^3) = 2$, δηλαδή το *ρητό προβολικό επίπεδο*. Για την κατηγοριοποίηση των συμμετρικών διγραμμικών μορφών επί διανυσματικών χώρων με σώμα το σύνολο των

ρητών αριθμών, ισχύει ό,τι και για τους πραγματικούς αριθμούς (βλ Παράδειγμα 6.2.2′). Συνεπώς η μόνη κωνική που υπάρχει στο ρητό προβολικό επίπεδο προσδιορίζεται από τις ρητές λύσεις της συμμετρικής διγραμμικής μορφής

$$\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0$$

όπου $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ κάποιες ομογενείς συντεταγμένες του ρητού προβολικού επιπέδου. Επιλέγουμε το σημείο $x = (1, 1, 0)$ με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα $v_0 = (1, 1, 0)$ και έστω $P(U)$ η ευθεία $\lambda_0 = 0$. Τότε αν το σημείο $y \in P(U)$ έχει αντιπροσωπευτικό διάνυσμα $u = (0, \mu_1, \mu_2)$, (πρώτη συντεταγμένη 0 διότι $\lambda_0 = 0$), τότε από την εξίσωση της κωνικής προκύπτει ότι $B(u, u) = -\mu_1^2 - \mu_2^2$ και $B(u, v_0) = -\mu_1$. Το σημείο $\alpha(y)$ θα ορίζεται από τη σχέση 8:

$$\gamma v_0 - \beta u = B(u, u)v_0 - 2B(u, v_0)u = -(\mu_1^2 + \mu_2^2)(1, 1, 0) + 2\mu_1(0, \mu_1, \mu_2) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$$

δηλαδή θα έχουμε ότι

$$\lambda_0 = -(\mu_1^2 + \mu_2^2)$$
$$\lambda_1 = \mu_1^2 - \mu_2^2$$

και

$$\lambda_2 = 2\mu_1\mu_2$$

ή σε ανομογενείς συντεταγμένες, αν θέσουμε

$$t := \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

θα πάρουμε

$$x_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

και

$$x_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{-2t}{1 + t^2}.$$

Βρίσκουμε λοιπόν πως κάθε ρητή λύση της εξίσωσης $x_1^2 + x_2^2 = 1$ αποκτάται παίρνοντας ένα ρητό αριθμό

$$t = -\frac{p}{q}$$

με $p, q \in \mathbb{Z}$ και αντικαθιστώντας την τιμή $t = -\frac{p}{q}$ στις παραπάνω ανομογενείς συντεταγμένες παίρνουμε

$$x_1 = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}$$

και

$$x_2 = \frac{2qp}{q^2 + p^2}$$

οπότε η σχέση

$$(q^2 - p^2)^2 + (2qp)^2 = (q^2 + p^2)^2$$

δίδει τη γενική λύση στους ακέραιους της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$.

Σημείωση 1: Μια επιπλέον εφαρμογή του θεωρήματος 6.4.1 στην ανάλυση είναι η εξής: μπορούμε να εκφράσουμε ένα σημείο (x, y) της γενικής κωνικής

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

στην μορφή

$$x = \frac{p(t)}{r(t)}, y = \frac{q(t)}{r(t)},$$

όπου τα p, q, r είναι πολυώνυμα β΄ βαθμού. Για τον λόγο αυτό, το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

μπορεί να επιλυθεί με βασικές συναρτήσεις διότι εάν $y = x + \sqrt{ax^2 + bx + c}$, τότε

$$(y - x)^2 - ax^2 - bx - c = 0$$

η οποία αποτελεί εξίσωση κωνικής. Μπορούμε να την επιλύσουμε θέτοντας $x = p(t)/r(t), y = q(t)/r(t)$ οπότε με αυτή την αντικατάσταση το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{r'(t)p(t) - p'(t)r(t)}{q(t)r(t)} dt$$

οπότε αναπτύσοντας την ρητή έκφραση σε μερικά κλάσματα παίρνουμε τελικά ρητές σναρτήσεις και λογαρίθμους μετά την ολοκλήρωση.

7 Γραμμικοί Χώροι Τετραγωνικών

7.1 Το Ορθογώνιο Συμπλήρωμα

Έστω V διανυσματικός χώρος (πεπερασμένης διάστασης με σώμα τους πραγματικούς αριθμούς αν και το δεύτερο δεν είναι καθοριστικό) εφοδιασμένος με μια μη-εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή B. Οι συμμετρικές διγραμμικές μορφές ορίζουν τετραγωνικές καμπύλες αλλά επίσης ορίζουν και την έννοια της *ορθογωνιότητας*. Θα δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία της ορθογωνιότητας.

Εάν $U \leq V$ ένας διανυσματικός υπόχωρος του V, μπορούμε να ορίσουμε τον *κάθετο υπόχωρο* $U^\perp \leq V$ ως το σύνολο

$$U^\perp := \{v \in V | B(u,v) = 0, \forall u \in U\}$$

Αν η B είναι το γνωστό Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, τότε ο παραπάνω ορισμός δίδει το *ορθογώνιο συμπλήρωμα* αλλά γενικά ο $U^\perp$ μπορεί να μην είναι συμπληρωματικός του U ως διανυσματικός χώρος. Για παράδειγμα αν $B(u,u) = 0$ τότε $u \in U^\perp$.

Οι ιδιότητες του κάθετου υπόχωρου $U^\perp$ του U φαίνονται καλύτερα αν χρησιμοποιήσουμε δυϊκούς χώρους. Είδαμε στην παράγραφο 5.1 ότι $V \cong V^* \cong V^{**}$. Όμως ενώ υπάρχει φυσικός ισομορφισμός μεταξύ των V και V^{**}, δεν υπάρχει γενικά φυσικός ισομορφισμός μεταξύ ενός διανυσματικού χώρου και του δυϊκού αυτού. Στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως, επειδή ο V είναι εφοδιασμένος με μια συμμετρική διγραμμική μορφή B, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε και να ορίσουμε έναν *ισομορφισμό* $\beta : V \to V^*$ ως εξής:

$$\beta_v(w) := B(v,w)$$

όπου $V \ni v \mapsto \beta_v \in V^*$. Η παραπάνω απεικόνιση β είναι προφανώς γραμμική ως προς το v και ο πυρήνας της αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα διότι $\beta(v) = 0 \Rightarrow B(v,w) = 0 \forall w \Rightarrow v = 0$, άρα αποτελεί ισομορφισμό. Το β_v ως στοιχείο του V^* είναι μια γραμμική απεικόνιση $\beta_v : V \to \mathbb{R}$. Με τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε

$$B(v,u) = 0, \forall u \in U \Leftrightarrow \beta_v(u) = 0, \forall u \in U$$

δηλαδή αν $\beta_v \in U^0$. Συνεπώς

$$\beta(U^\perp) = U^0.$$

Από την Πρόταση 5.2.2 έχουμε την παρακάτω:

Πρόταση 1. Έστω U, U_1 και U_2 διανυσματικοί υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε:
(i) $U = (U^{\perp})^{\perp}$.
(ii) Αν $U_1 \leq U_2$, τότε $U_2^{\perp} \leq U_1^{\perp}$.
(iii) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$.
(iv) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$.
(v) $dimU + dimU^{\perp} = dimV$.

Με γεωμετρικούς όρους η διγραμμική μορφή B ορίζει μια μη-εκφυλισμένη τετραγωνική στον προβολικό χώρο $P(V)$. Ο χώρος $U^{\perp}$ είναι ο ίδιος είτε αυτός ορισθεί μέσω της B είτε μέσω της λB, με $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Συνεπώς για κάθε γραμμικό υπόχωρο $P(U)$ διάστασης k του $P(V)$, η τετραγωνική ορίζει άλλον ένα χώρο $P(U^{\perp})$ διάστασης

$$dimP(U^{\perp}) = dimP(V) - dimP(U) - 1$$

Ορισμός 1. Εάν $x \in P(V)$ ορίζεται μέσω ενός μονοδιάστατου διανυσματικού υποχώρου $U \leq V$, τότε ως *πολική* του σημείου x ορίζεται το υπερεπίπεδο $P(U^{\perp}) \subseteq P(V)$. Το σημείο x λέγεται *πόλος* του υπερεπιπέδου $P(U^{\perp})$.

Σημείωση 1. Στο σημείο αυτό τα πράγματα απλοποιούνται εάν χρησιμοποιήσουμε μιγαδικούς αριθμούς. Αναφέρουμε πως ιστορικά ο πρώτος που μελέτησε μιγαδική γεωμετρία ήταν ο γάλλος Jean-Victor Poncelet (1788-1867), αξιωματικός στο στρατό του Ναπολέοντα, μάλιστα την μελέτη της μιγαδικής γεωμετρίας την άρχισε ως αιχμάλωτος πολέμου στην Ρωσία.

Θεωρούμε στην συνέχεια το μιγαδικό προβολικό επίπεδο ($dim_{\mathbb{C}}P(V) = 2$), εφοδιασμένο με μια μη-εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή B η οποία ορίζει μια κωνική $C \subset P(V)$.

Ορισμός 2. Καλούμε *εφαπτομένη* μιας κωνικής μια ευθεία που τέμνει την κωνική σε ένα μόνο σημείο.

Πρόταση 2. *Έστω C μια κωνική του μιγαδικού προβολικού επιπέδου $P(V)$. Τότε:*
(α). *Κάθε (προβολική) ευθεία του (μιγαδικού προβολικού) επιπέδου τέμνει την κωνική σε ένα ή δύο σημεία.*
(β). *Εάν $P \in C$ ένα σημείο της κωνικής, η πολική του ευθεία είναι η μοναδική εφαπτομένη της C που διέρχεται από το σημείο P.*

(γ). *Εάν P δεν ανήκει στην κωνική, τότε η πολική του τέμνει την κωνική σε δύο σημεία και οι εφαπτόμενες της κωνικής σε αυτά τα σημεία τέμνονται στο P.*

Απόδειξη: Έστω $U \leq V$ ένας υπόχωρος διάστασης 2 που ορίζει την προβολική ευθεία $P(U)$ και έστω u, v μια βάση αυτού. Τότε το σημείο $[\lambda u + \mu v]$ βρίσκεται στην κωνική εάν

$$0 = B(\lambda u + \mu v, \lambda u + \mu v) = \lambda^2 B(u,u) + 2\lambda\mu B(u,v) + \mu^2 B(v,v).$$

Επειδή το σώμα είναι οι μαγαδικοί, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ως εξής

$$0 = (a\lambda - b\mu)(a'\lambda - b'\mu)$$

που δίδει δύο (ίσως ίδια) σημεία τομής της ευθείας και της κωνικής

$$[bu + av], [b'u, a'v].$$

Έστω το σημείο $P \in C$ και έστω u αντιπροσωπευτικό διάνυσμα του P τέτοιο ώστε $B(u,u) = 0$. Τότε κάθε ευθεία που διέρχεται από το P είναι η $P(U)$ όπου ο U παράγεται από τα u, v. Τότε όμως από την παραπάνω σχέση τα σημεία τομής θα είναι

$$2\lambda\mu B(u,v) + \mu^2 B(v,v) = 0.$$

Εάν το μοναδικό σημείο τομής είναι το $[u]$, τότε $\mu = 0$ είναι η μοναδική λύση της παραπάνω εξίσωσης που σημαίνει ότι $B(u,v) = 0$. Αφού κάθε διάνυσμα $w \in U$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των u, v και $B(u,u) = B(u,v) = 0$, αυτό σημαίνει ότι $B(u,w) = 0$ και η $P(U)$ είναι η πολική του x.

Από τα παραπάνω, εάν P δεν βρίσκεται στην κωνική, η πολική του θα πρέπει να τέμνει την κωνική σε δύο διαφορετικά σημεία με αντιπροσωπευτικά διανύσματα v_1, v_2. Τότε έχουμε

$$B(u, v_1) = 0 = B(v_1, v_2).$$

Αφού $B(u,u) \neq 0$ και $B(v_1, v_1) = 0$, τα u και v_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον δισδιάστατο υπόχωρο U_1. Από την τελευταία ισότητα η $P(U_1)$ αποτελεί την πολική του $[v_1] \in C$ οπότε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο $[v_1]$. Αντίστοιχα ισχύουν και για το σημείο $[v_2]$. $\square$

Οι τετραγωνικές αποτελούν μη γραμμικά υποσύνολα του προβολικού χώρου $P(V)$ τα οποία όμως περιέχουν διάφορους γραμμικούς υποχώρους. Για παράδειγμα εάν $Q \subset P(V)$ είναι μια μη-εκφυλισμένη τετραγωνική, τότε $P(U) \subset Q$ εάν και μόνον εάν $B(u,u) = 0 \forall u \in U$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$2B(u_1, u_2) = B(u_1 + u_2, u_1 + u_2) - B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2) = 0$$

οπότε

$$U \subset U^{\perp}.$$

Αφού

$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V,$$

αυτό σημαίνει ότι

$$2 \dim U \leq \dim U + \dim U^{\perp} = \dim V.$$

Στην πραγματικότητα με σώμα τους μιγαδικούς η μέγιστη τιμή επισυμβαίνει πάντα. Εάν $\dim V = 2m$, από το Θεώρημα 6.1.1 υπάρχει μια βάση στην οποία η $B(v, v)$ μπορεί να γραφεί ως

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2m}^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + ... + (x_{2m-1} + ix_{2m})(x_{2m-1} - ix_{2m})$$

οπότε εάν το U ορίζεται από τη σχέση

$$x_1 - ix_2 = x_3 - ix_4 = ... = x_{2m-1} - ix_{2m} = 0,$$

τότε $\dim U = (\dim V)/2$ και $U \subseteq U^{\perp}$ οπότε $U = U^{\perp}$. Στους πραγματικούς αριθμούς αυτό συμβαίνει όταν $p = q = m$ και η μορφή ανάγεται στην

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2 - x_{m+1}^2 - ... - x_{2m}^2.$$

Παράδειγμα 1. Έστω η τετραγωνική επιφάνεια

$$x_1^2 - x_2^2 = x_3^2 - x_4^2$$

στον $P(\mathbb{R}^4)$. Αυτή τέμνει το αντίγραφο του $\mathbb{R}^3 \subset P(\mathbb{R}^4)$ που ορίζεται από την σχέση $x_4 = 0$ στο υπερβολοειδές εκ περιστροφής

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

όπου θέσαμε $x = x_2/x_4, y = x_3/x_4, z = x_1/x_4$. Υπάρχουν 2 μονοπαραμετρικές οικογένειες ευθειών στην τετραγωνική που δίδονται από τις

$$\lambda(x_1 - x_2) = \mu(x_3 - x_4)$$

$$\lambda(x_3 + x_4) = \mu(x_1 - x_2)$$

και

$$\lambda(x_1 - x_2) = \mu(x_3 + x_4)$$

$$\lambda(x_3 - x_4) = \mu(x_1 + x_2).$$

Στην πραγματικότητα αυτές οι δύο οικογένειες παρέχουν συντεταγμένες για την προβολική τετραγωνική, την απεικόνιση

$$F : P(\mathbb{R}^2) \times P(\mathbb{R}^2) \to Q$$

που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$F([u_0, u_1], [v_0, v_1]) = [u_0v_0 + u_1v_1, u_1v_1 - u_0v_0, u_0v_1 + u_1v_0, u_1v_0 - u_0v_1]$$

η οποία αποτελεί αμφεικόνιση.

7.2 Παραδείγματα Τετραγωνικών Καμπυλών και Επιφανειών

Αν ο μονοδιάστατος διανυσματικός υπόχωρος $U \leq V$ ικανοποιεί τη σχέση $U \leq U^{\perp}$, τότε αναπαριστά ένα σημείο της τετραγωνικής διότι $B(u, u) = 0$ για κάποιο αντιπροσωπευτικό διάνυσμα.

Αν ο διανυσματικός υπόχωρος $U \leq V$ με $dimU_1$ ικανοποιεί την $U \leq U^{\perp}$, τότε $B(u, u) = 0, \forall u \in U$, οπότε ολόκληρος ο γραμμικός υπόχωρος $P(U)$ ανήκει στην τετραγωνική καμπύλη. Αντίστροφα, αν ο $P(U)$ ανήκει στην τετραγωνική καμπύλη, τότε η τετραγωνική μορφή B μηδενίζεται όταν περιοριστεί στον U όπως και η σχετιζόμενη διγραμμική μορφή. Οπότε $B(u, u') = 0, \forall u, u' \in U$ και τότε $U \leq U^{\perp}$, οπότε $dimU \leq dimU^{\perp}$. Όμως επίσης

$$dimU + dimU^{\perp} = dimV$$

οπότε

$$dimU \leq \frac{1}{2}dimV.$$

Με γεωμετρικούς όρους, αν ο γραμμικός υπόχωρος $P(U)$ βρίσκεται σε μια μη-εκφυλισμένη τετραγωνική καμπύλη του $P(V)$, τότε

$$dimP(U) \leq \frac{1}{2}[dimP(V) - 1].$$

Αν $dimP(V) = 2$, τότε $dimP(U) = 0$ οπότε υπάρχουν μόνο σημεία σε μια μη-εκφυλισμένη κωνική καμπύλη.

Αν $dimP(V) = 3$, τότε $dimP(U) \leq 1$ οπότε μπορεί να υπάρχουν σημεία αλλά και ευθείες σε μια τετραγωνική επιφάνεια.

Για να αναλύσουμε την τετραγωνική επιφάνεια, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\alpha : P(\mathbb{C}^2) \times P(\mathbb{C}^2) \to P(\mathbb{C}^4)$$

που με χρήση ομογενών συντεταγμένων ορίζεται ως εξής:

$$\alpha((\lambda_0, \lambda_1), (\mu_0, \mu_1)) = (\lambda_0\mu_0, \lambda_0\mu_1, \lambda_1\mu_0, \lambda_1\mu_1)$$

Αν (z_0, z_1, z_2, z_3) είναι ομογενείς συντεταγμένες στον $P(\mathbb{C}^4)$, τότε η εικόνα της α βρίσκεται στην τετραγωνική

$$z_0z_3 = \lambda_0\mu_0\lambda_1\mu_1 = z_1z_2$$

Αυτή είναι μια μη-εκφυλισμένη τετραγωνική επιφάνεια. Αντίστροφα, θεωρούμε ότι το (z_0, z_1, z_2, z_3) βρίσκεται στην επιφάνεια. Δε μηδενίζονται όλες οι συντεταγμένες, έστω $z_0 \neq 0$, οπότε τότε

$$\alpha((z_0, z_2), (z_0, z_1)) = (z_0, z_1, z_2, z_3)$$

και ανάλογα με τις υπόλοιπες πιθανές περιπτώσεις. Θεωρούμε ότι $z_i \neq 0$ οπότε η α είναι επί. Είναι επίσης 1-1, αν μελετήσουμε τις 4 περιπτώσεις $z_i \neq 0$, με $i = 0, 1, 2, 3$.

Για παράδειγμα, αν $z_0 \neq 0$ και $\lambda_0\mu_0 = \lambda_0'\mu_0'$, $\lambda_0\mu_1 = \lambda_0'\mu_1'$, $\lambda_1\mu_0 = \lambda_1'\mu_1'$, τότε διαιρώντας δια $\lambda_0\mu_0$, παίρνουμε

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\mu_1'}{\mu_0'}$$

και

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1'}{\lambda_0'}$$

οπότε η α είναι αμφεικόνιση.

Στην συνέχεια, καθορίζουμε ένα τυχαίο σημείο, έστω (λ_0, λ_1), στην πρώτη προβολική ευθεία και η εικόνα αυτού του υποσυνόλου μέσω της α είναι η ευθεία

$$\lambda_1 z_0 - \lambda_0 z_2 = 0$$

$$\lambda_1 z_1 - \lambda_0 z_3 = 0.$$

Ανάλογα, καθορίζοντας το (μ_0, μ_1), η εικόνα είναι η ευθεία

$$\mu_1 z_0 - \mu_0 z_1 = 0$$

$$\mu_1 z_2 - \mu_0 z_3 = 0.$$

Συνεπώς η τετραγωνική (επιφάνεια) έχει 2 μονο-παραμετρικές οικογένειες ευθειών πάνω της.

Αν ορίσουμε την απεικόνιση α στους πραγματικούς, τότε θα πάρουμε την τετραγωνική

$$z_0 z_3 = z_1 z_2$$

στον πραγματικό προβολικό χώρο $P(\mathbb{R}^4)$ που είναι ισοδύναμη με την

$$z_0^2 - z_1^2 = z_2^2 - z_3^2$$

κάτω από έναν προβολικό μετασχηματισμό. Σε ανομογενείς συντεταγμένες

$$x_i := \frac{z_i}{z_0},$$

το τμήμα της τετραγωνικής για το οποίο $z_0 \neq 0$, είναι το

$$1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

που είναι μια επιφάνεια εκ περιστροφής που παράγεται από την υπερβολή

$$x_1^2 - x_3^2 = 1$$

Αυτή περιέχει τις δύο οικογένειες ευθειών και μπορεί να παραχθεί από χορδές ιδίου μήκους σε δύο δακτυλίους περιστρέφοντας τον ένα σε σχέση με τον άλλο.

Κάθε μιγαδική τετραγωνική σε έναν προβολικό χώρο περιττής διάστασης $dim_{\mathbb{C}} P(V) = 2n + 1$ έχει ένα γραμμικό υπόχωρο διάστασης n που είναι η μέγιστη επιτρεπτή διάσταση από την ισότητα

$$dimU \leq \frac{1}{2} dimV.$$

Αν τη θέσουμε στη μορφή του Θεωρήματος 6.1.1, θα έχουμε

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + ... + \lambda_{2n+1}^2 = 0$$

η οποία μπορεί να μετασχηματισθεί χρησιμοποιώντας την

$$z_{2j} = \lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}$$

και

$$z_{2j+1} = \lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}$$

στη μορφή

$$z_0 z_1 - z_2 z_3 + ... \pm z_{2n} z_{2n+1} = 0$$

και τότε οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \mu_1 z_0 - \mu_0 z_2 &= 0 \\ \mu_1 z_1 - \mu_0 z_3 &= 0 \\ \nu_1 z_4 - \nu_0 z_6 &= 0 \\ \nu_1 z_5 - \nu_0 z_7 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ορίζουν έναν τέτοιο υπόχωρο.

8 Γραφίδες Τετραγωνικών (Pencils of Quadrics)

Στην προηγούμενη παράγραφο ασχοληθήκαμε με την γεωμετρική ερμηνεία μιας συμμετρικής διγραμμικής μορφής. Τώρα θα δούμε την θεωρία που αφορά *ζεύγη διγραμμικών μορφών*.

8.1 Διαγωνιοποίηση Ζεύγους Πινάκων

Έστω V μιγαδικός διανυσματικός χώρος διάστασης n. Από το Θεώρημα 6.1.1 προκύπτει ότι εάν B είναι μια τετραγωνική μορφή, αυτή μπορεί να εκφρασθεί σε κάποια κατάλληλη βάση ως

$$B(v,v) = x_1^2 + ... + x_n^2.$$

Η B στην εν λόγω βάση αναπαρίσταται μέσω του μοναδιαίου πίνακα I_n. Εάν έχουμε ένα ζεύγος A, B συμμετρικών διγραμμικών μορφών, θέλουμε να δούμε εάν μπορούν να διαγωνιοποιηθούν ταυτόχρονα (δηλαδή με την ίδια βάση). Ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1. Έστω A, B δύο συμμετρικοί $n \times n$ μιγαδικοί πίνακες και έστω ο A είναι μη-εκφυλισμένος ($\det A \neq 0$). Τότε εάν η εξίσωση $\det(\lambda A - B) = 0$ έχει n διαφορετικές λύσεις $\lambda_1, ..., \lambda_n$, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$P^T AP = I_n, P^T BP = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n).$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 6.1.1 μπορούμε να βρούμε αντιστρέψιμο πίνακα Q τέτοιον ώστε $Q^T AQ = I_n$. Γράφουμε $B' = Q^T BQ$, οπότε ο B' είναι επίσης συμμετρικός. Τότε

$$\det Q^T \det(\lambda A - B) \det Q = \det[Q^T(\lambda A - B)Q] = \det(\lambda I_n - B'),$$

οπότε οι λύσεις της εξίσωσης $\det(\lambda A - B) = 0$ αποτελούν τις ιδιοτιμές του B'. Εξ υπόθεσης αυτές είναι όλες διαφορετικές, οπότε έχουμε μια βάση ιδιοδιανυσμάτων έστω $v_1, ..., v_n$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Εάν $v_l = (x_1, ..., x_n)$ και $v_k = (y_1, ..., y_n)$, τότε

$$\lambda_l \sum_i x_i y_i = \sum_{i,j} B'_{ij} x_j y_i = \sum_{i,j} B'_{ji} x_j y_i = \lambda_k \sum_i x_i y_i$$

και αφού $\lambda_l \neq \lambda_k$, έχουμε

$$\sum_i x_i y_i = 0.$$

Συνεπώς τα v_l και v_k είναι ορθογώνια εάν $k \neq l$. Επίσης πρέπει να έχουμε $(v_i, v_i) \neq 0$ διότι διαφορετικά το v_i θα είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα της βάσης $v_1, ..., v_n$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{(v_i, v_i)}} v_i$$

και να πάρουμε μια ορθοκανονική βάση. Ως προς αυτή τη βάση, ο B' είναι διαγώνιος οπότε εάν R είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας που ορίζει την αλλαγή βάσης, $R^T B' R = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ και $R^T R = I_n$. Θέτοντας $P = QR$ αποκτάμε το ζητούμενο. $\square$

Έχουμε συνεπώς βρει μια βάση, την (κανονικοποιημένη) βάση $\{w_i\}_{i=1,...,n}$, η οποία *διαγωνιοποιεί ταυτόχρονα και τις δύο τετραγωνικές μορφές* (συμμετρικούς πίνακες) A και B.

Η γεωμετρία που σχετίζεται με ζεύγη τετραγωνικών μορφών αφορά τις λεγόμενες *γραφίδες τετραγωνικών καμπυλών*: Έστω A, B συμμετρικές διγραμμικές μορφές σε έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n οι οποίες ορίζουν διαφορετικές τετραγωνικές Q και Q' αντίστοιχα. Τότε:

Ορισμός 1. Η *γραφίδα τετραγωνικών (pencil of quadrics)* στον προβολικό χώρο $P(V)$ που παράγεται από τις τετραγωνικές Q και Q' είναι το σύνολο των τετραγωνικών που ορίζονται από τον γραμμικό συνδυασμό $\lambda A + \mu B$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ με $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Υπενθυμίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα τα ακόλουθα: έστω V διανυσματικός χώρος με σώμα $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης $dim_{\mathbb{F}}(V) = n$. Το σύνολο των συμμετρικών διγραμμικών μορφών του V αποτελεί ένα νέο διανυσματικό χώρο SV με το ίδιο σώμα όπως ο V με διάσταση $dim_{\mathbb{F}} SV = \frac{1}{2}n(n+1)$. Ο διανυσματικός χώρος SV είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο των συμμετρικών $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.

Μια γραφίδα τετραγωνικών συνεπώς αποτελεί μια προβολική ευθεία στον $P(SV)$, δηλαδή μια οικογένεια τετραγωνικών που παραμετροποιείται μέσω μιας προβολικής ευθείας. Δεν είναι φυσικά όλες οι τετραγωνικές καμπύλες μιας γραφίδας μη-εκφυλισμένες. Οι εκφυλισμένες εμφανίζονται στα σημεία (λ, μ) για τα οποία ισχύει

$$det(\lambda A + \mu B) = 0.$$

Εάν ο A είναι μη-εκφυλισμένος τότε για μια λύση της εξίσωσης αυτής θα πρέπει $\mu \neq 0$ οπότε με τις υποθέσεις της παραπάνω πρότασης 8.1.1 μπορούμε να

σκεφτούμε ότι τα σημεία με ομογενείς συντεταγμένες $[\lambda_i, 1] \in P(\mathbb{C}^2)$ ορίζουν n εκφυλισμένες τετραγωνικές στην γραφίδα. Η γεωμετρία είναι καθαρή στην περίπτωση που ο $P(V)$ είναι επίπεδο: Στην περίπτωση αυτή μια εκφυλισμένη τετραγωνική έχει κανονική μορφή x_1^2 ή $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 - ix_2)(x_1 + ix_2)$ οπότε αποτελέι διπλή ευθεία ή ζεύγος ευθειών.

8.2 Γραφίδες στο Μιγαδικό Προβολικό Επίπεδο

Θα μελετήσουμε γραφίδες κωνικών στο μιγαδικό προβολικό επίπεδο, δηλαδή θεωρούμε ότι $dim_{\mathbb{C}}V = 3$, οπότε $dim_{\mathbb{C}}P(V) = 2$. Υποθέτουμε ότι οι A και B είναι μη-εκφυλισμένες και ότι οι ιδιοτιμές λ_i, $i = 0, 1, 2$ είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Από την προηγούμενη παράγραφο έπεται πως υπάρχει μια βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ ως προς την οποία οι A και B διαγωνιοποιούνται ταυτόχρονα. Θα περιγράψουμε αυτή την κατάσταση γεωμετρικά. Ένα ζεύγος κωνικών καθορίζει τρία σημεία στο προβολικό επίπεδο με αντιπροσωπευτικά διανύσματα τα $\{v_1, v_2, v_3\}$. Έχουμε το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 1. Έστω C και C' δύο μη-εκφυλισμένες κωνικές καμπύλες στο μιγαδικό προβολικό επίπεδο που ορίζονται από τις συμμετρικές διγραμμικές μορφές A και B αντίστοιχα και έστω ότι η γραφίδα που παράγεται από τις C και C' έχει τρεις διαφορετικές εκφυλισμένες κωνικές. Τότε:
(i) Η γραφίδα αποτελείται από όλες τις κωνικές που διέρχονται από τέσσερα σημεία σε γενική θέση.
(ii) Οι εκφυλισμένες κωνικές της γραφίδας αποτελούνται από τρία ζεύγη ευθειών που προκύπτουν ενώνοντας τα ξένα ζεύγη αυτών των τεσσάρων σημείων.
(iii) Κάθε ζεύγος τέτοιων ευθειών τέμνεται σε σημείο με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα $v_i, i = 1, 2, 3$, οπότε αποκτάμε μια βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ του V ως προς την οποία οι A και B διαγωνιοποιούνται ταυτόχρονα.

Απόδειξη:
(i) Χρησιμοποιούμε τα όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 8.1 για να βάλουμε τις κωνικές στη μορφή

$$C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

και

$$C' : \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη επί λ_1 και αφαιρούμε τη δεύτερη οπότε θα πάρουμε

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x_2^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)x_3^2 = 0$$

Τα τέσσερα σημεία τομής των C και C' θα είναι

$$[\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}, \pm\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}]$$

όπου έχουμε φιξάρει μια επιλογή προσήμου (θετικό) για την τετραγωνική ρίζα του $\lambda_2-\lambda_3$. Για να δείξουμε πως αυτά είναι σε γενική θέση, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε τριάδα αυτών έχει αντιπροσωπευτικά διανύσματα που είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Παρατηρούμε ότι

$$det\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2-\lambda_3} & \sqrt{\lambda_3-\lambda_1} & \sqrt{\lambda_1-\lambda_2} \\ \sqrt{\lambda_2-\lambda_3} & -\sqrt{\lambda_3-\lambda_1} & \sqrt{\lambda_1-\lambda_2} \\ \sqrt{\lambda_2-\lambda_3} & -\sqrt{\lambda_3-\lambda_1} & -\sqrt{\lambda_1-\lambda_2} \end{pmatrix} = 4\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}$$

και αφού τα λ_i είναι όλα διαφορετικά η ορίζουσα είναι μη-μηδενική.

Τώρα εάν $[u]$ είναι κάποιο από αυτά τα 4 σημεία $A(u,u)=0, B(u,u)=0$ και έτσι $(\lambda A+\mu B)(u,u)=0$ και κάθε κωνική στην γραφίδα διέρχεται από αυτά τα σημεία. Αντίστροφα από το Θεώρημα 4.2.1 μπορούμε να επιλέξουμε αυτά τα σημεία να είναι

$$[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,1].$$

Οι κωνικές που διέρχονται από αυτά τα σημεία έχουν πίνακες b_{ij} όπου

$$b_{11}=b_{22}=b_{33}=b_{12}+b_{23}+b_{31}=0.$$

Ο διανυσματικός χώρος των συμμετρικών 3×3 πινάκων έχει διάσταση 6 και μια βάση αυτού είναι η

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και οι 4 εξισώσεις

$$b_{11}=b_{22}=b_{33}=b_{12}+b_{23}+b_{31}=0$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε ορίζουν έναν υπόχωρο διάστασης 2 που παράγεται από τους πίνακες A και B, αυτή είναι η γραφίδα.

(ii) Οι εκφυλισμένες κωνικές της γραφίδας δίδονται από την σχέση $(A-\lambda_i B)(v,v)=0$. Πρέπει να κατανοήσουμε τις εκφυλισμένες τετραγωνικές (κωνικές) της γραφίδας, για παράδειγμα

$$\lambda_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2)=(\lambda_1-\lambda_2)x_2^2-(\lambda_3-\lambda_1)x_3^2=0.$$

Όμως το παραπάνω παραγοντοποιείται ως

$$(\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}x_2-\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_3)(\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}x_2+\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_3=0.$$

Αυτές οι δύο ευθείες, ανήκοντας στην γραφίδα, διέρχονται από τα σημεία τομής, αλλά αφού τα 4 αυτά σημεία είναι σε γενική θέση, κάθε ευθεία διέρχεται μόνο από 2 εξ αυτών, συνεπώς αυτές οι δύο ευθείες συνιστούν το ζητούμενο ζεύγος όπου η ευθεία $\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}x_2+\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_3=0$ διέρχεται από τα σημεία $[\sqrt{\lambda_2-\lambda_3},\sqrt{\lambda_3-\lambda_1},-\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}]$ και $[\sqrt{\lambda_2-\lambda_3},-\sqrt{\lambda_3-\lambda_1},\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}]$ ενώ η δεύτερη ευθεία διέρχεται από τα άλλα δύο σημεία τομής.

(iii) Η τομή των δύο ευθειών $\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}x_2-\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_3=0$ και $\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}x_2+\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_3=0$ στο **(ii)** παραπάνω είναι το σημείο $[1,0,0]$, δηλαδή το σημείο με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα το διάνυσμα βάσης v_1 της βάσης που διαγωνιοποιεί τις 2 κωνικές. Ανάλογα τα άλλα δύο ζεύγη ευθειών δίδουν τα υπόλοιπα διανύσματα της βάσης. □

Αυτή η γεωμετρική αναπαράσταση μιας γραφίδας βοηθά στο να αναγνωρίζει κανείς πότε δύο συμμετρικές διγραμμικές μορφές με 3 μεταβλητές μπορούν ή όχι να διαγωνιοποιηθούν ταυτόχρονα: Εάν οι ιδιοτιμές λ_i δεν είναι όλες διαφορετικές και οι μορφές μπορούν να διαγωνιοποιηθούν ταυτόχρονα, τότε είτε είναι η μια βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης είτε είναι της μορφής

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$$

και

$$\lambda x_1^2+x_2^2+x_3^2=0.$$

Σε αυτή την περίπτωση οι δύο κωνικές τέμνονται στα σημεία όπου $x_1=0$ και $x_2=\pm ix_3$ (δύο σημεία τομής). Η περίπτωση που δεν διαγωνιοποιούνται ταυτόχρονα είναι όταν η τομή συμβαίνει σε περιττό πλήθος σημείων.

Σχόλιο 1: Η ταυτόχρονη διαγωνιοποίηση πινάκων και γενικότερα τελεστών σε περίπτωση χώρων Hilbert (που ουσιαστικά αποτελούν διανυσματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο άπειρης διάστασης), είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην *Κβαντική Μηχανική*. Η πιο γνωστή μορφή της περίφημης *αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg* (ή *αρχή της αβεβαιότητας*), ουσιαστικά λέει πως δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν με απόλυτη ακρίβεια η ορμή και η θέση ενός σωματιδίου. Στο βάθος, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ορμή και η θέση αποτελούν *ασυμβίβαστα φυσικά μεγέθη*, δηλαδή οι τελεστές της ορμής και της θέσης δεν *μετατίθενται*, συνεπώς δεν διαγωνιοποιούνται ταυτόχρονα (βλ Παραπομπή στην Απόδειξη της Πρότασης 6.1.1). Αυτή η μαθηματική ιδιότητα εκφράζει το *δυϊσμό κύματος και ακτινοβολίας* στη φύση. Το φυσικό

νόημα της σταθεράς του Planck είναι πως εκφράζει ποσοτικά την ασυμβατότητα αυτή. Σημειώνουμε δε πως η αρχή της αβεβαιότητας ισχύει γενικότερα για κάθε ζεύγος φυσικών μεγεθών που αναπαρίστανται μέσω τελεστών που δεν μετατίθενται, δηλαδή που δεν διαγωνιοποιούνται ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, ένα άλλο ζεύγος ασυμβίβαστων φυσικών μεγεθών (εκτός της θέσης και της ορμής) είναι η ενέργεια και ο χρόνος.

Φύλλο Ασκήσεων Β.

(1). Ποια από τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές ορίζει μια μη-εκφυλισμένη κωνική;
• $x_0^2 - 2x_0x_1 + 4x_0x_2 - 8x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$
• $x_0^2 - 2x_0x_1 + x_1^2 - 2x_0x_2$

(2). Θεωρείστε 5 τυχαία σημεία σε ένα προβολικό επίπεδο τέτοια ώστε καμία τριάδα αυτών δεν είναι συνευθειακά. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική μη-εκφυλισμένη κωνική που διέρχεται και από τα 5 αυτά σημεία.

(3). Έστω C μια μη-εκφυλισμένη κωνική σε ένα προβολικό επίπεδο $P(V)$. Δείξτε ότι εάν $X \in P(V)$ κινείται σε μια ευθεία l, τότε η πολική διέρχεται από ένα σταθερό σημείο Y. Ποια η σχέση του σημείου Y και της ευθείας l;

(4). Έστω $\tau : P(\mathbb{R}^2) \to P(\mathbb{R}^2)$ ένας προβολικός μετασχηματισμός και θεωρείστε το γράφημα αυτού

$$\Gamma_\tau \subset P(\mathbb{R}^2) \times P(\mathbb{R}^2),$$

δηλαδή $\Gamma_\tau := \{(X, Y) : Y = \tau(X)\}$. Χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία $1 : 1$ μεταξύ του $P(\mathbb{R}^2) \times P(\mathbb{R}^2)$ και της τετραγωνικής επιφάνειας $P(\mathbb{R}^4)$, δείξτε ότι το Γ_τ αποτελεί την τομή της τετραγωνικής επιφάνειας με το επίπεδο.

(5). Αποδείξτε ότι εάν $L \leq V$ και $M \leq V$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι της ίδιας διάστασης, τότε

$$\dim(L \cap M^\perp) = \dim(L^\perp \cap M).$$

(6). Δείξτε ότι οι δύο τετραγωνικές μορφές

$$x^2 + y^2 - z^2$$

και

$$x^2 + y^2 - yz$$

δεν μπορούν να διαγωνιοποιηθούν ταυτόχρονα.

(7). Έστω $P(\mathbb{R}^6)$ ο χώρος των κωνικών του $P(\mathbb{R}^3)$. Δείξτε ότι οι κωνικές που διέρχονται από 3 μη συνευθειακά σημεία συνιστούν ένα προβολικό επίπεδο $P(V) \subset P(\mathbb{R}^6)$. Δείξτε ακόμη ότι οι κωνικές που παραμετροποιούνται από αυτό το επίπεδο και εφάπτονται σε μια δοσμένη ευθεία αποτελούν μια νέα

κωνική του $P(V)$.

(8). Δείξτε ότι το σύνολο των εφαπτόμενων ευθειών σε μια μη-εκφυλισμένη κωνική του $P(V)$ αποτελεί κωνική του δυϊκού χώρου $P(V^*)$.

9 Το Εξωτερικό Γινόμενο

9.1 Αναπαράσταση επιπέδων του χώρου μέσω του εξωτερικού γινομένου

Στις προηγούμενες παραγράφους αρχίζαμε με κάποιο κομμάτι γνωστής γραμμικής άλγεβρας στο οποίο προσδίδαμε γεωμετρική υπόσταση. Τώρα θα ακολουθήσουμε αντίστροφη πορεία: θα αναφέρουμε κάτι καινούργιο από τη γραμμική άλγεβρα το οποίο στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε για να επιλύσουμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, την περιγραφή των προβολικών ευθειών μέσα στον προβολικό χώρο τριών διαστάσεων.

Γενικότερα, τα νέα εργαλεία της γραμμικής άλγεβρας που θα αναπτύξουμε θα μας δώσουν τη δυνατότητα να περιγράψουμε όλους τους προβολικούς υποχώρους διάστασης m ενός προβολικού χώρου διάστασης n (προφανώς $m \leq n$). Κυρίως θα περιοριστούμε στην περίπτωση $n = 3$ και $m = 1$ (προβολικές ευθείες στον τρισδιάστατο προβολικό χώρο), περίπτωση που περιλαμβάνει και τις κοινές ευθείες στον κοινό τρισδιάστατο φυσικό χώρο.

Η νέα γραμμική άλγεβρα που θα αναπτύξουμε λέγεται *εξωτερική άλγεβρα* και έχει πάμπολλες άλλες εφαρμογές στη γεωμετρία (περιγραφή χωρίς χρήση συστημάτων συντεταγμένων), τη Γενική Θεωρία Σχετικότητας και τη θεωρία υπερσυμμετρίας στη θεωρητική φυσική κ.ά.

Υποθέτουμε πως το σώμα $\mathbb{F}$ **δεν** έχει χαρακτηριστική μηδέν, δηλαδή $a \cdot 1 = 0 \Rightarrow a = 0$ (όπου $a \in \mathbb{F}$ και $0, 1$ το μηδενικό και το μοναδιαίο στοιχείο του σώματος αντίστοιχα και $\cdot$ η εσωτερική πράξη του πολλαπλασιασμού στο σώμα).

Ως κίνητρο για την εισαγωγή των *εξωτερικών δυνάμεων* θεωρούμε το πρόβλημα της περιγραφής των προβολικών ευθειών στο πραγματικό προβολικό επίπεδο. Στην παράγραφο 5 το λύσαμε χρησιμοποιώντας το δυϊκό χώρο ενός διανυσματικού χώρου. Μια προβολική ευθεία στο προβολικό επίπεδο (θεωρούμε ότι $dimP(V) = 2$, οπότε $dimV = 3$), περιγράφεται από ένα 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$ ($dimU = 2$ οπότε $dimP(U) = 1$), που δίδεται από τη σχέση $f(v) = 0$ όπου $f \in V^*$, δηλαδή η f είναι μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to \mathbb{R}$ και προφανώς $v \in V$.

Αν V είναι ο 3-διάστατος Ευκλείδειος χώρος (δηλαδή $V = \mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το γνωστό Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο), τότε με το γνωστό συμβολισμό της διανυσματικής άλγεβρας, ο 2-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος U, ο

οποίος γεωμετρικά αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο, ορίζεται από την εξίσωση

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{a} = 0,$$

όπου $\overrightarrow{a}$ το *κάθετο διάνυσμα* στο επίπεδο U. Αν επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε έστω ότι ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι $\overrightarrow{r} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, έτσι ώστε $f(v) = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$.

Το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ του επιπέδου U μπορεί να ορισθεί θεωρώντας 2 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$ του U και σχηματίζοντας το *εξωτερικό γινόμενο*

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$$

Το εξωτερικό γινόμενο έχει τις εξής ιδιότητες:
(i) *γραμμικότητα*:

$$(\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2}) \times \overrightarrow{v} = \lambda_1(\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v}) + \lambda_2(\overrightarrow{u_2} \times \overrightarrow{v})$$

(ii) *αντιμεταθετικότητα με αλλαγή προσήμου*:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$$

Προσοχή! Υπενθυμίζουμε ότι δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στο εξωτερικό γινόμενο.

Από τις δύο παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι αν $\overrightarrow{u'}$ και $\overrightarrow{v'}$ είναι δύο άλλα γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους διανύσματα του U, τότε έστω ότι

$$\overrightarrow{u'} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

και

$$\overrightarrow{v'} = c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v}$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, οπότε

$$\overrightarrow{u'} \times \overrightarrow{v'} = (a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) \times (c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v}) = (ad - bc)\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$$

δηλαδή το διάνυσμα $\overrightarrow{u'} \times \overrightarrow{v'}$ είναι ένα μη-μηδενικό βαθμωτό πολλαπλάσιο του διανύσματος $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ οπότε ορίζει το ίδιο σημείο στον προβολικό χώρο $P(\mathbb{R}^3)$.

Για να περιγράψουμε μια προβολική ευθεία στον πραγματικό προβολικό 3-διάστατο χώρο, θεωρούμε ένα 2-διάστατο υπόχωρο $U \leq V$ ενός 4-διάστατου διανυσματικού χώρου V. Στην περίπτωση που $V = \mathbb{R}^3$, είδαμε ότι το διάνυσμα

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ που είναι το εξωτερικό γινόμενο δύο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$ του V, περιγράφει ένα 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο U του V (που γεωμετρικά αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο του χώρου), όντας το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου που παράγεται από τα διανύσματα $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$. Συνεπώς, αν $dimP(V) = 2$ (οπότε $dimV = 3$), *μια ευθεία του $P(V)$ περιγράφεται από το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$*, όπου $P(U)$ είναι η προβολική ευθεία, δηλαδή $dimP(U) = 1$ και $dimU = 2$ και $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$ είναι τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V που παράγουν το διανυσματικό υπόχωρο U από τον οποίο προκύπτει η προβολική ευθεία.

Στις περιπτώσεις που $dimP(V) \geq 3$, (δηλαδή $dimV \geq 4$), απαιτείται μια γενίκευση του εξωτερικού γινομένου για να περιγράψουμε τις ευθείες του $P(V)$ που θα τη δούμε αμέσως παρακάτω και που λέγεται *σφηνοειδές γινόμενο (wedge product)*. Θα κατασκευάσουμε ένα διάνυσμα που θα το συμβολίζουμε $u \wedge v \in W$ σε ένα νέο διανυσματικό χώρο W τον οποίο θα ορίσουμε με κατάλληλο τρόπο, με $u, v \in V$. Το σφηνοειδές γινόμενο θα ικανοποιεί τουλάχιστον τις δύο βασικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου:

(i)′ *γραμμικότητα*:

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \wedge v = \lambda_1 (u_1 \wedge v) + \lambda_2 (u_2 \wedge v)$$

(ii)′ *αντιμεταθετικότητα με αλλαγή προσήμου*:

$$u \wedge v = -v \wedge u$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και u_1, u_2, u, $v \in V$ ενώ $u \wedge v \in W$. Όπως και στην περίπτωση του πραγματικού προβολικού επιπέδου, κάθε 2-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος $U \leq V$ θα ορίζει ένα σημείο στον $P(W)$ με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα το $u \wedge v \in W$ όπου τα u, v είναι δύο τυχαία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V. Συνεπώς *μια ευθεία στον $P(V)$ θα ορίζει ένα σημείο στον $P(W)$*.

9.2 Δεύτερη εξωτερική δύναμη ενός διανυσματικού χώρου και το σφηνοειδές γινόμενο

Έστω W ο διανυσματικός χώρος στον οποίο βρίσκεται το διάνυσμα $u \wedge v \in W$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες **(i)′** και **(ii)′**. Έστω $\beta \in W^*$, δηλαδή η β είναι μια γραμμική απεικόνιση $\beta : W \to \mathbb{F}$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$B(u, v) := \beta(u \wedge v)$$

οπότε η B είναι μια απεικόνιση $B : V \times V \to \mathbb{F}$ που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:
(i′)′ *γραμμικότητα*:

$$B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v)$$

(ii′)′ *αντισυμμετρικότητα*:

$$B(u, v) = -B(v, u)$$

Δηλαδή η B είναι μια *αντισυμμετρική* (ή *εναλλάσσουσα*) διγραμμική μορφή του V. Το σύνολο των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών ενός διανυσματικού χώρου V αποτελεί ένα νέο διανυσματικό χώρο με ίδιο σώμα όπως ο V τον οποίο θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}(V)$. Θέτουμε εξ ορισμού ότι

$$\mathcal{B}(V) := W^*$$

Έστω $dimV = n+1$. Αν επιλέξουμε μια βάση $\{v_i\}_{(i=0,1,\ldots,n)}$ του V, τότε κάθε αντισυμμετρική διγραμμική μορφή B του V αναπαρίσταται μέσω ενός *αντισυμμετρικού* $(n+1) \times (n+1)$ πίνακα $B_{ij} = B(v_i, v_j)$ όπου $B_{ij} = -B_{ji}$.

Ορισμός 1. Η *δεύτερη εξωτερική δύναμη* $\bigwedge^2 V$ ενός διανυσματικού χώρου V ορίζεται ως ο δυϊκός χώρος του διανυσματικού χώρου των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών $\mathcal{B}(V)$ του V, δηλαδή $\bigwedge^2 V := [\mathcal{B}(V)]^*$.

Δηλαδή ισχύουν τα εξής:

$$\mathcal{B}(V) = W^* \Rightarrow [\mathcal{B}(V)]^* = W^{**} = W = \bigwedge^2 V.$$

Ορισμός 2. Το *εξωτερικό γινόμενο* $u \wedge v \in \bigwedge^2 V$ δύο διανυσμάτων $u, v \in V$ είναι το στοιχείο του $\bigwedge^2 V$ που ορίζεται από τη γραμμική απεικόνιση $f(B) = B(u, v)$ στο χώρο των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών, δηλαδή $B \in \mathcal{B}(V)$ και $f \in [\mathcal{B}(V)]^* = W^{**} = W = \bigwedge^2 V$. Τα στοιχεία του $\bigwedge^2 V$ λέγονται *2-διανύσματα*.

Οι επιθυμητές θεμελιώδεις ιδιότητες **(i)′**

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \wedge v = \lambda_1 (u_1 \wedge v) + \lambda_2 (u_2 \wedge v)$$

και **(ii)′**

$$u \wedge v = -v \wedge u$$

έπονται άμεσα από τον ορισμό.

Έστω $\{v_i\}_{(i=0,1,...,n)}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου V. Τότε ο διανυσματικός χώρος των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών $\mathcal{B}(V)$ του V είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο των αντισυμμετρικών $(n+1)\times(n+1)$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$ μέσω της απεικόνισης (ισομορφισμός)

$$B_{ij} \leftrightarrow B(v_i, v_j).$$

Γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα ότι ο διανυσματικός χώρος των αντισυμμετρικών τετραγωνικών $(n+1)\times(n+1)$ πινάκων έχει διάσταση $\frac{n(n+1)}{2}$. Συνεπώς, αν $dimV = n+1$, τότε $dimW = dim\bigwedge^2 V = \frac{n(n+1)}{2}$.

Μια βάση του W προκύπτει από τους πίνακες $B_{ij}^{(kl)}$ με $k<l$, όπου $B_{kl}^{(kl)} = 1 = B_{lk}^{(kl)}$ και είναι μηδέν για τις υπόλοιπες τιμές των i,j (προφανώς $i,j,k,l = 0,1,...,dimV$).

Θεωρούμε τα διανύσματα $v_i \wedge v_j \in \bigwedge^2 V$ για $i<j$. Αυτά σχηματίζουν τη δυϊκή βάση του $\bigwedge^2 V$ που εξ ορισμού είναι ο δυϊκός χώρος του χώρου των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών του V.

Πρόταση 1. *Έστω $u \in V$ κάποιο μη-μηδενικό διάνυσμα. Τότε $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow v = \lambda u$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Απόδειξη. Αν $v = \lambda u$, τότε $u \wedge v = u \wedge \lambda u = \lambda(u \wedge u) = 0$ αφού από την ιδιότητα **(ii)**$'$ έχουμε πως $u \wedge u = -u \wedge u$.

Αντίστροφα, έστω $v \neq \lambda u$. Επεκτείνουμε το $\{u, v\}$ σε μια βάση του V, οπότε το $u \wedge v$ θα είναι μέλος της αντίστοιχης βάσης του $\bigwedge^2 V$ και συνεπώς μη-μηδενικό (αντιθετοαντιστροφή). $\square$

Θα πρέπει να επισημάνουμε πως **δε** γράφεται κάθε στοιχείο του διανυσματικού χώρου $\bigwedge^2 V$ στη μορφή $u \wedge v$ για κάποια διανύσματα $u, v \in V$ (τα 2-διανύσματα για τα οποία συμβαίνει αυτό λέγονται *αποσυνθέσιμα*). Κάποια στοιχεία του $\bigwedge^2 V$ θα είναι γραμμικοί συνδυασμοί όρων αυτής της μορφής. Αν και θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με αυτό σε μια επόμενη παράγραφο, ας δούμε ένα παράδειγμα: έστω $V = \mathbb{R}^4$ και $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ μια βάση του V και υποθέτουμε ότι $v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3 = v \wedge v'$, όπου $v = a_0v_0 + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ και $v' = b_0v_0 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$ δύο τυχαία διανύσματα του V. Εκτελούμε επιμεριστικά τις πράξεις και έχουμε:

$$v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3 = v \wedge v' = (a_0v_0 + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) \wedge (b_0v_0 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3)$$

Θεωρούμε τους συντελεστές των διανυσμάτων της βάσης $v_i \wedge v_j$ του $\bigwedge^2 V$, με $i < j$, και έχουμε:

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

οπότε συγκεκριμένα το διάνυσμα (a_0, b_0) είναι μη-μηδενικό στον $\mathbb{R}^2$ (συντεταγμένες ως προς τη συνήθη βάση). Όμως $a_0 b_2 - a_2 b_0 = 0$ και $a_0 b_3 - a_3 b_0 = 0$, οπότε τα διανύσματα (a_2, b_2) και (a_3, b_3) είναι βαθμωτά πολλαπλάσια του (a_0, b_0) και άρα γραμμικά εξαρτημένα. Αυτό αντιβαίνει την εξίσωση

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = 1$$

που προκύπτει από τους συντελεστές του διανύσματος $v_2 \wedge v_3$. Συνεπώς το 2-διάνυσμα $v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3$ δεν είναι *αποσυνθέσιμο*.

Τα στοιχεία του $\bigwedge^2 V$ που γράφονται στην μορφή $u \wedge v$ για κάποια διανύσματα $u, v \in V$ έχουν την μεγαλύτερη σημασία για την παρούσα συζήτηση. Έστω $U \leq V$ υπόχωρος διάστασης 2 ($\dim V = 3$) και $\{u, v\}$ μια βάση του U. Τότε κάθε άλλη βάση θα είναι της μορφής $\{au + bv, cu + dv\}$, οπότε χρησιμοποιώντας την $u \wedge u = v \wedge v = 0$, παίρνουμε

$$(au + bv) \wedge (cu + dv) = (ad - bc) u \wedge v$$

και αφού ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

είναι αντιστρέψιμος θα ισχύει $ad - bc \neq 0$. Άρα ο διανυσματικός υπόχωρος διάστασης 1 του $\bigwedge^2 V$ που παράγεται από το $u \wedge v$ (όπου $\{u, v\}$ μια βάση του U), είναι καλά ορισμένος από τον U και είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της βάσης $\{u, v\}$. Σε κάθε ευθεία του $P(V)$ μπορούμε συνεπώς να αντιστοιχίσουμε ένα σημείο του $P(\bigwedge^2 V)$.

Επανερχόμαστε στο πρόβλημα της περιγραφής των ευθειών στον 3-διάστατο προβολικό χώρο $P(V)$ με $dimP(V) = 3$ οπότε $dimV = 4$. Βλέπουμε ότι κάθε ευθεία καθορίζει ένα 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$ και παίρνοντας κάποια γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα u_1, $u_2 \in V$, αποκτάμε, μέσω της Πρότασης 9.2.1 παραπάνω, ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $u_1 \wedge u_2 \in \bigwedge^2 V$ το οποίο με τη σειρά του ορίζει ένα σημείο στον προβολικό χώρο $P(\bigwedge^2 V)$ που είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των διανυσμάτων u_1 και u_2 λόγω των ιδιοτήτων **(i')** και **(ii')** του Ορισμού 9.2.2.

Δεν είναι όμως κάθε σημείο του $P(\bigwedge^2 V)$ αυτής της μορφής. Πράγματι, αφού $dimV = 4$, τότε $dim[\bigwedge^2 V] = 6$ και $dim[P(\bigwedge^2 V)] = 5$, οπότε κάθε

σημείο του προβολικού χώρου $P(\bigwedge^2 V)$ είναι ένα σημείο σε ένα χώρο 5 διαστάσεων, άρα θα έχει 5 συντεταγμένες. Από τα παραδείγματα της παραγράφου 3 γνωρίζουμε πως μια ευθεία σε ένα χώρο n διαστάεων καθορίζεται από $n-1$ παραμέτρους, συνεπώς μια ευθεία στον προβολικό χώρο που μας ενδιαφέρει, αφού αυτός έχει διάσταση 5, θα καθορίζεται από 4 παραμέτρους. Πρέπει λοιπόν να υπάρχει μια εξίσωση που να ικανοποιείται από τα διανύσματα του $\bigwedge^2 V$ για να αντιστοιχούν στις ευθείες του προβολικού χώρου $P(\bigwedge^2 V)$ (οπότε η εξίσωση αυτή θα *σκοτώσει* την 5η παράμετρο και θα παραμείνουν οι επιθυμητές 4). Για να προσδιοριστεί αυτή η εξίσωση θα πρέπει να επεκτείνουμε την έννοια του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων του V, δηλαδή απαιτείται να ορισθούν και ανώτερες από 2 εξωτερικές δυνάμεις του διανυσματικού χώρου V. Για να περιγράψουμε συνεπώς τον χώρο των ευθειών θα πρέπει να βρούμε τρόπο να χαρακτηρίσουμε τα *αποσυνθέσιμα* 2-διανύσματα $u \wedge v$.

Σημείωση 1: Ένα επίπεδο U του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή ένας διανυσματικός υπόχωρος $U \leq \mathbb{R}^3$ με $dimU = 2$, όπως είδαμε στην παράγραφο 9.1, για να ορισθεί απαιτούνται 3 παράμετροι που είναι οι συντεταγμένες του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο $\overrightarrow{a} \perp U$ όπου $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ (οι συντεταγμένες έστω ότι είναι ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$). Συνεπώς για να ορισθεί ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^4$, δηλαδή για να ορισθεί ένας διανυσματικός υπόχωρος $U \leq \mathbb{R}^4$ με $dimU = 2$, απαιτούνται 4 παράμετροι που είναι οι συντεταγμένες του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο $a \perp U$ όπου $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$. Αν πάρουμε τους αντίστοιχους προβολικούς χώρους των παραπάνω, βλέπουμε πως για να ορίσουμε μια προβολική ευθεία $P(U)$ στον τρισδιάστατο προβολικό χώρο $P(\mathbb{R}^4)$ απαιτούνται 4 παράμετροι.

Μια ευθεία του V ορίζει ένα σημείο στον προβολικό χώρο $P(V)$. Θέλουμε να ορίσουμε έναν κατάλληλο διανυσματικό χώρο έστω Q (που θα προκύπτει από τον V), έτσι ώστε να έχουμε κατ΄ αντιστοιχία ότι *οι ευθείες του $P(V)$ θα αντιστοιχούν σε σημεία του $P(Q)$.* Η δεύτερη εξωτερική δύναμη $W = \bigwedge^2 V$ που ορίσαμε πλησίασε το στόχο αλλά δεν τον πέτυχε ακριβώς, θα χρειαστεί λίγη δουλειά ακόμη που θα τη δούμε στην επόμενη παράγραφο.

10 Η Εξωτερική Άλγεβρα

10.1 Ανώτερες εξωτερικές δυνάμεις ενός διανυσματικού χώρου

Έστω V διανυσματικός χώρος με σώμα $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης $dimV = n+1$.

Ορισμός 1. Μια *αντισυμμετρική πολυγραμμική μορφή βαθμού* p (antisymmetric multilinear form of degree p), όπου $p \in \mathbb{N}$, είναι μια απεικόνιση

$$M \ : \ \underbrace{V \times V \times V \times ... \times V}_{p \ \ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\epsilon\varsigma} \to \mathbb{F} \tag{9}$$

τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

(i) *αντισυμμετρικότητα:*

$$M(v_1, ..., v_m, ..., v_n, ..., v_p) = -M(v_1, ..., v_n, ..., v_m, ..., v_p)$$

(ii) *γραμμικότητα:*

$$M(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v_2, ..., v_p) = \lambda_1 M(u_1, v_2, ..., v_p) + \lambda_2 M(u_2, v_2, ..., v_p).$$

Δηλαδή η M είναι γραμμική σε όλες τις μεταβλητές και αλλάζει πρόσημο αν δύο οποιεσδήποτε μεταβλητές αλλάξουν θέση.

Φανερά, μια αντισυμμετρική πολυγραμμική μορφή βαθμού 2 είναι μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή και ο ορισμός 10.1.1 αποτελεί γενίκευση του ορισμού που δώσαμε στην παράγραφο 9.2.

Το κλασικό παράδειγμα μιας αντισυμμετρικής πολυγραμμικής μορφής είναι η *ορίζουσα* των τετραγωνικών πινάκων εάν θεωρήσουμε τις στήλες (ή τις γραμμές) του πίνακα ως διανύσματα του αντίστοιχου διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 2. Η *p-εξωτερική δύναμη* $\bigwedge^p V$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι ο δυϊκός χώρος του διανυσματικού χώρου των αντισυμμετρικών πολυγραμμικών μορφών βαθμού p του V.

Έχουμε ήδη δει τη δεύτερη εξωτερική δύναμη $\bigwedge^2 V$ ενός διανυσματικού χώρου V στην προηγούμενη παράγραφο. Η *πρώτη εξωτερική δύναμη* $\bigwedge^1 V$ ταυτίζεται με το δυϊκό χώρο του χώρου των γραμμικών απεικονίσεων $f : V \to \mathbb{F}$, δηλαδή με το δυϊκό του δυϊκού χώρου του V, δηλαδή με τον ίδιο τον V: $\bigwedge^1 V = V$.

Η *μηδενική εξωτερική δύναμη* $\bigwedge^0 V$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι ο δυϊκός χώρος του χώρου των σταθερών συναρτήσεων του V και ταυτίζεται με το σώμα, δηλαδή $\bigwedge^0 V = \mathbb{F}$ (υπενθυμίζουμε πως κάθε σώμα αποτελεί διανυσματικό χώρο διάστασης 1 με σώμα τον εαυτό του).

Δοθέντων p-ως προς το πλήθος διανυσμάτων u_1, u_2,..., $u_p \in V$, κατ' αναλογία με τον ορισμό 9.2.2, ορίζουμε ένα στοιχείο $u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p \in \bigwedge^p V$ ως τη γραμμική απεικόνιση $f(M) = M(u_1, u_2, ..., u_p)$ στο χώρο των αντισυμμετρικών πολυγραμμικών απεικονίσεων βαθμού p.

Αν $\{v_i\}_{(i=0,1,...,n)}$ μια βάση του V, $(dimV = n+1)$, τότε μια αντισυμμετρική πολυγραμμική απεικόνιση M καθορίζεται από τις τιμές $M(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_p})$, με $i_1 < i_2 < ... < i_p$, διότι από τη γραμμικότητα η τιμή της M σε μια τυχαία p-άδα διανυσμάτων είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των τιμών της στα διανύσματα βάσης του $\bigwedge^p V$ ενώ η αντισυμμετρικότητα αποκλείει την περίπτωση $v_m = v_n$ και μέσω αναδιατάξεων με αντίστοιχες αλλαγές προσήμου (και λίγη σκέψη!) μπορούμε να καταλήξουμε στην παραδοχή $i_1 < i_2 < ... < i_p$.

Η διατεταγμένη p-άδα $(i_1, i_2, ..., i_p)$, καθορίζεται από ένα υποσύνολο p-ως προς το πλήθος στοιχείων από τα $(n+1)$-ως προς το πλήθος συνολικά διανύσματα βάσης του V, συνεπώς η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\bigwedge^p V$ θα είναι

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ p \end{pmatrix} = \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!}$$

Αποδείξαμε λοιπόν την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1. Ισχύει ο παρακάτω τύπος για τη διάσταση του διανυσματικού χώρου $\bigwedge^p V$:

$$dim[\bigwedge^p V] = \begin{pmatrix} dimV \\ p \end{pmatrix}.$$

Τα διανύσματα $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge ... \wedge v_{i_p}$, με $i_1 < i_2 < ... < i_p$, αποτελούν μια βάση του $\bigwedge^p V$.

Αν $p > dimV$, τότε **δεν** υπάρχουν μη-μηδενικές πολυγραμμικές αντισυμμετρικές μορφές ενώ αν $p = dimV$ τότε $dim[\bigwedge^p V] = 1$ και αποτελείται από όλα

τα βαθμωτά πολλαπλάσια του $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n$, όπου $\{v_i\}_{(i=0,1,...,n)}$ μια βάση του V.

Ισχύει το αντίστοιχο της πρότασης 9.2.1:

Πρόταση 2. Έστω u_1,u_2,...,$u_p \in V$. Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν και μόνο εάν $u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p (\in \bigwedge V^p) \neq 0$.

Απόδειξη: Αν

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$$

και τα $\lambda_i \in \mathbb{F}$, με $i = 0, 1, ..., p$, δεν είναι όλα μηδέν (δηλαδή τα u_1, u_2,..., $u_p \in V$ είναι γραμμικά εξαρτημένα), τότε για κάποιο j θα ισχύει

$$u_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{p} \mu_i u_i$$

οπότε

$$u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_j \wedge ... \wedge u_p = \sum_{i=1, i \neq j}^{p} \mu_i (u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_i \wedge ... \wedge u_p) =$$

$$= \mu_1 (u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_1 \wedge ... \wedge u_p) + \mu_2 (u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p) + ... = 0$$

διότι εναλλάσοντας τη θέση δύο παραγόντων αλλάζει το πρόσημο οπότε κάθε όρος της μορφής $u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_1 \wedge ... \wedge u_p$ μηδενίζεται (γενικά στο σφηνοειδές γινόμενο αν υπάρχει επανάληψη κάποιου παράγοντα, αυτό μηδενίζεται λόγω αντισυμμετρικότητας).

Αντίστροφα, αν τα u_1,u_2,...,$u_p \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επεκτείνονται σε μια βάση του V και τότε το $u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p$ είναι ένα διάνυσμα βάσης του $\bigwedge^p V$ (διότι $1 < 2 < ... < p$ οπότε ικανοποιείται η σχέση $i_1 < i_2 < ... < i_p$), άρα είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα. $\square$.

Οι εξωτερικές δυνάμεις $\bigwedge^p V$ έχουν φυσικές ιδιότητες ως προς τους γραμμικούς μετασχηματισμούς: δοθέντος ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T : V \to W$ και μιας αντισυμμετρικής πολυγραμμικής μορφής M στον W, ορίζεται μια *επαγόμενη* αντισυμμετρική πολυγραμμική μορφή T^*M στον V:

$$T^*M(u_1, u_2, ..., u_p) = M(Tu_1, Tu_2, ..., Tu_p)$$

η οποία με τη σειρά της ορίζει μια δυϊκή γραμμική απεικόνιση

$$\bigwedge^p T : \bigwedge^p V \to \bigwedge^p W$$

με την ιδιότητα

$$\bigwedge^p T(u_1 \wedge u_2 \wedge ..., \wedge u_p) = Tu_1 \wedge Tu_2 \wedge ... \wedge Tu_p.$$

Ένα γνωστό παράδειγμα είναι το εξής: έστω $p = n = \dim V$ οπότε ο $\bigwedge^n V$ έχει διάσταση 1 και παράγεται από το $u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_n$ για μια βάση $\{u_1, ..., u_n\}$ του V. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός ενός διανυσματικού χώρου διάστασης 1 στον εαυτό του δεν είναι παρά ένας βαθμωτός πολλαπλασιασμός με κάποιο στοιχείο του σώματος, συνεπως ο $\bigwedge^n T$ είναι ένα στοιχείο του σώματος. Στην πραγματικότητα $\bigwedge^n T = det(T)$. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε αρχικά πως

$$\bigwedge^n T(u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_n) = Tu_1 \wedge Tu_2 \wedge ... \wedge Tu_n$$

και το δεξί μέλος μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας τον πίνακα T_{ij} της T ως

$$\sum_{i_1,...,i_n} T_{i_1 1} u_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_n n} u_{i_n} = \sum_{i_1,...,i_n} T_{i_1 1} ... T_{i_n n} u_{i_1} \wedge ... \wedge u_{i_n}.$$

Καθένας από τους παραπάνω όρους μηδενίζεται εάν κάποιο ζεύγος των $i_1, ..., i_n$ είναι ίσα από την ιδιότητα του σφηνοειδούς (εξωτερικού) γινομένου, οπότε αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση που τα $(i_1, ..., i_n)$ αποτελούν μια μετάθεση των $(1, 2, ..., n)$. Κάθε μετάθεση αποτελείται από γινόμενο αντιμεταθέσεων και κάθε αντιμετάθεση αλλάζει το πρόσημο του εξωτερικού γινομένου, συνεπώς

$$\wedge^n T(u_1 \wedge ... \wedge u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) T_{\sigma(1)1} T_{\sigma(2)2} ... T_{\sigma(n)n} u_1 \wedge ... \wedge u_n$$

που αποτελεί τον ορισμό της ορίζουσας του πίνακα T_{ij}.

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε υποδηλώνει ότι το p-διάνυσμα $u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p \in \bigwedge^p V$ και το q-διάνυσμα $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_q \in \bigwedge^q V$ όπου u_i, $v_j \in V$ με $i = 0, 1, ..., p$ και $j = 0, 1, ..., q$, πρέπει να *πολλαπλασιαστούν εξωτερικά (σφηνοειδές γινόμενο)* για να πάρουμε το $(p+q)$-διάνυσμα $u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_q \in \bigwedge^{p+q} V$.

Εισάγουμε μια πράξη πολλαπλασιασμού, το *εξωτερικό (ή σφηνοειδές) γινόμενο*, μεταξύ των στοιχείων $a \in \bigwedge^p V$, και $b \in \bigwedge^q V$ για να πάρουμε το διάνυσμα $a \wedge b \in \bigwedge^{p+q} V$. Το γινόμενο αυτό ορίζεται ως εξής:

Για δοσμένα διανύσματα $u_1, ..., u_p \in V$, έστω ότι η

$$M(u_1, u_2, ..., u_p, v_1, v_2, ..., v_q)$$

αποτελεί μια αντισυμμετρική πολυγραμμική μορφή των $v_1, ..., v_q$, οπότε εάν $b \in \bigwedge^q V$ με

$$b = \sum_{j_1 < ... < j_q} \lambda_{j_1 ... j_q} v_{j_1} \wedge ... \wedge v_{j_q},$$

τότε το

$$\sum_{j_1 < ... < j_q} \lambda_{j_1 ... j_q} M(u_1, ..., u_p, v_{j_1} ... v_{j_q})$$

εξαρτάται μόνο από το b και όχι από τον συγκεκριμένο τρόπο που αυτό γράφεται ως προς την βάση $\{v_1, ..., v_n\}$. Ομοίως εάν

$$a = \sum_{i_1 < ... < i_p} \mu_{i_1 ... i_p} u_{i_1} \wedge ... \wedge u_{i_p},$$

τότε το

$$\sum_{i_1 < ... < i_p} \mu_{i_1 ... i_p} M(u_{i_1}, ..., u_{i_p}, v_1, ..., v_q)$$

εξαρτάται μόνο από το a. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε το $a \wedge b$ μέσω της τιμής του πάνω σε μια αντισυμμετρική πολυγραμμική $p+q$ μορφή M ως

$$(a \wedge b)(M) = \sum_{i_1 < ... < i_p; j_1 < ... < j_q} \mu_{i_1 ... i_p} \lambda_{j_1 ... j_q} M(u_{i_1}, ..., u_{i_p}, v_{j_1}, ... v_{j_q}).$$

Το παραπάνω περιγράφεται και λίγο διαφορετικά:

Ένα τυχαίο στοιχείο $a \in \bigwedge^p V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$a = \sum_i \lambda_i a_i$$

αποσυνθέσιμων (decomposable) διανυσμάτων $a_i \in \bigwedge^p V$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{F}$ και $i = 1, 2, ..., dim \bigwedge^p V$. Ένα στοιχείο $a_i \in \bigwedge^p V$ λέγεται *αποσυνθέσιμο* αν μπορεί να γραφεί στη μορφή $a_i = u_i^1 \wedge u_i^2 \wedge ... \wedge u_i^p$, για κάποια διανύσματα u_i^1, u_i^2,..., $u_i^p \in V$. Αν το $b \in \bigwedge^q V$ αντίστοιχα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$b = \sum_j \mu_j b_j$$

αποσυνθέσιμων διανυσμάτων $b_j = v_j^1 \wedge v_j^2 \wedge ... \wedge v_j^q$, τότε ορίζουμε το εξωτερικό γινόμενο

$$a \wedge b = \sum \lambda_i \mu_j a_i \wedge b_j$$

όπου

$$(u_i^1 \wedge u_i^2 \wedge ... \wedge u_i^p) \wedge (v_j^1 \wedge v_j^2 \wedge ... \wedge v_j^q) =$$

$$= u_i^1 \wedge u_i^2 \wedge ... \wedge u_i^p \wedge v_j^1 \wedge v_j^2 \wedge ... \wedge v_j^q.$$

Θα πρέπει να ελέγξουμε ότι το παραπάνω γινόμενο είναι καλά ορισμένο, δηλαδή ότι εξαρτάται μόνο από τα διανύσματα a και b ως στοιχεία των $\bigwedge^p V$ και $\bigwedge^q V$ αντίστοιχα και **όχι** από τον τρόπο που γράψαμε το καθένα αποτελούμενο από αποσυνθέσιμα στοιχεία. Όμως το $a \wedge b \in \bigwedge^{p+q} V$ ανήκει στο δυϊκό χώρο του χώρου των αντισυμμετρικών πολυγραμμικών μορφών βαθμού $(p+q)$ και αν το υπολογίσουμε σε μια τέτοια μορφή M θα πάρουμε

$$a \wedge b(M) = \sum \lambda_i \mu_j (a_i \wedge b_j)(M) = \sum \lambda_i \mu_j M(u_i^1, u_i^2, ..., u_i^p, v_j^1, v_j^2, ..., v_j^q).$$

Αν καθορίσουμε τα u_i^j, η $M(u_i^1, ..., u_i^p, v_1, v_2, ..., v_q)$ είναι μια αντισυμμετρική πολυγραμμική μορφή βαθμού q οπότε η παραπάνω έκφραση εξαρτάται μόνο από το $b \in \bigwedge^q V$. Ανάλογα, αν καθορίσουμε τα v_j^i, η M εξαρτάται μόνο από το $a \in \bigwedge^p V$, συνεπώς το $a \wedge b$ είναι καλά ορισμένο.

Το σφηνοειδές γινόμενο **δεν** είναι *αντιμεταθετικό* (όπως και το γνωστό εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων δεν είναι αντιμεταθετικό). Υπενθυμίζουμε πως μια εναλλαγή δύο όρων στο γινόμενο $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_q$ αλλάζει το πρόσημο, συνεπώς

$$u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_q = -u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge v_1 \wedge u_p \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_q =$$

$$= (-1)^p v_1 \wedge u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_q = (-1)^{2p} v_1 \wedge v_2 \wedge u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p \wedge v_3 \wedge ... \wedge v_q =$$

$$= (-1)^{qp} v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_q \wedge u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p.$$

Αποδείξαμε λοιπόν την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 3. Άν $a \in \bigwedge^p V$ και $b \in \bigwedge^q V$, τότε

$$a \wedge b = (-1)^{qp} b \wedge a.$$

Επίσης στο σφηνοειδές γινόμενο ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

και επίσης το σφηνοειδές γινόμενο είναι επιμεριστικό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c.$$

10.2 Παραδείγματα

1. Αν $a = u \wedge v \in \bigwedge^2 V$, όπου $u, v \in V$, τότε $a \wedge a = u \wedge v \wedge u \wedge v = 0$ διότι η εναλλαγή των u, v στο δεξί μέλος αλλάζει πρόσημο ενώ στο αριστερό μέλος το $a \wedge a$ δεν αλλάζει.

2. Έστω $a = v_1 + v_2$, $b = v_1 \wedge v_3 - v_3 \wedge v_2$, όπου $v_1, v_2, v_3 \in V$, τότε

$$a \wedge b = (v_1 + v_2) \wedge (v_1 \wedge v_3 - v_3 \wedge v_2) =$$

$$v_1 \wedge v_1 \wedge v_3 - v_1 \wedge v_3 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_1 \wedge v_3 - v_2 \wedge v_3 \wedge v_2 = -v_1 \wedge v_3 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_1 \wedge v_3 =$$

$$v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 - v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις βασικές ιδιότητες του σφηνοειδούς γινομένου ότι επαναλαμβανόμενο διάνυσμα δίδει μηδέν και η εναλλαγή της θέσης δύο διανυσμάτων αλλάζει το πρόσημο.

3. Αν $a = v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3$, με v_0, v_1, v_2, $v_3 \in V$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε

$$a \wedge a = (v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3) \wedge (v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3).$$

Αν εκτελέσουμε επιμεριστικά τις πράξεις θα πάρουμε:

$$a \wedge a = v_0 \wedge v_1 \wedge v_0 \wedge v_1 + v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3 \wedge v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3 \wedge v_2 \wedge v_3 =$$

$$= v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3 \wedge v_0 \wedge v_1 = 2v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$$

Από την Πρόταση 10.1.2 έπεται πως το $v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ είναι μη-μηδενικό, που αποδεικνύει ότι το διάνυσμα $a = v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3$, *δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή* $a = u \wedge v$, για κάποια διανύσματα $u, v \in V$ (ο παράγοντας 2 μας το απαγορεύει).

4. Έστω $\{v_0, v_1, ..., v_{2n}, v_{2n+1}\}$, μια βάση ενός διανυσματικού χώρου V με $dimV = 2n+2$ και έστω $a = v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3 + ... + v_{2n} \wedge v_{2n+1}$. Τότε ορίζουμε

$$a^{n+1} := \underbrace{a \wedge a \wedge a \wedge ... \wedge a}_{(n+1)\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\epsilon\varsigma} \tag{10}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$a^{n+1} = n!(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_{2n} \wedge v_{2n+1})$$

5. Αν $a \in \bigwedge^p V$ με p περιττό, τότε ισχύει ότι

$$a \wedge a = 0$$

Σχόλια:

1. Αν V κάποιος διανυσματικός χώρος με πεπερασμένη διάσταση, τότε το σύνολο όλων των εξωτερικών δυνάμεων

$$\bigcup_{q=0}^{dimV} \bigwedge^q V$$

αποτελεί μια *(γραμμική) άλγεβρα* με σώμα ίδιο με το σώμα του V, και πράξεις την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό του V και (εσωτερικό) πολλαπλασιασμό το *σφηνοειδές γινόμενο.* Επειδή κάθε στοιχείο αυτής της άλγεβρας φέρει και βαθμό, ονομάζεται *διαβαθμισμένη* (γραμμική) άλγεβρα (graded linear algebra).

2. Το σύμβολο '$\wedge$' λέγεται *σφήνα* (wedge), εξού και η ονομασία σφηνοειδές γινόμενο.

3. Οι πράξεις μεταξύ των αντισυμμετρικών πολυγραμμικών μορφών λέγεται και *λογισμός Cartan* (Cartan calculus).

11 Η Τετραγωνική Klein

11.1 Η συνθήκη αποσύνθεσης

Μια (προβολική) ευθεία στον προβολικό χώρο $P(V)$ ορίζεται μέσω ενός 2-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου $U \leq V$. Αν u_1, $u_2 \in U$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του U, σχηματίζουμε το 2-διάνυσμα $a = u_1 \wedge u_2 \in \bigwedge^2 V$ και με την αβεβαιότητα ενός βαθμωτού πολλαπλασίου, αυτό (το a), είναι ανεξάρτητο από την επιλογή βάσης. Το 2-διάνυσμα a ορίζει το διανυσματικό υπόχωρο U όπως φαίνεται από την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1. Έστω $a = u_1 \wedge u_2$, όπου τα u_1, u_2 είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Αν για κάποιο τυχαίο διάνυσμα $v \in V$ ισχύει $a \wedge v = 0$, τότε το v είναι γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 10.2. □

Η (προβολική) ευθεία στον $P(V)$ συνεπώς καθορίζεται από ένα σημείο του $P(\bigwedge^2 V)$ με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα $a = u_1 \wedge u_2$.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 9, το a πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες για να είναι της μορφής αυτής, δηλαδή αποσυνθέσιμο (decomposable). Οι συνθήκες αυτές περιγράφονται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1. Έστω $a \in \bigwedge^2 V$ κάποιο μη-μηδενικό στοιχείο. Τότε το a είναι αποσυνθέσιμο εάν και μόνο εάν $a \wedge a = 0$.

Απόδειξη: Αν το a είναι αποσυνθέσιμο, τότε $a = u_1 \wedge u_2$ για κάποια u_1, $u_2 \in V$. Τότε όμως

$$a \wedge a = u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$$

σύμφωνα με το παράδειγμα 10.1

Το αντίστροφο απαιτεί περισσότερη δουλειά και αποδυκνείεται με επαγωγή στη διάσταση του V.

$\diamond$ $dimV = 2$. Έστω $\{v_0, v_1\}$ μια βάση του V. Τότε $dim[\bigwedge^2 V] = 1$ και ο διανυσματικός χώρος $\bigwedge^2 V$ παράγεται από το 2-διάνυσμα $v_0 \wedge v_1$ το οποίο εξ ορισμού είναι αποσυνθέσιμο.

$\diamond$ $dimV = 3$. Έστω $a \in \bigwedge^2 V$ (όπου $dim[\bigwedge^2 V] = 3$), τυχαίο 2-διάνυσμα. Αφού $dim[\bigwedge^4 V] = 0$, φανερά $a \wedge a = 0$, $\forall a \in \bigwedge^2 V$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $A : V \to \bigwedge^3 V$, που ορίζεται από τη σχέση $A(v) = a \wedge v$. Αφού $dim[\bigwedge^3 V] = 1$, τότε $dim[Ker(A)] \geq 2$ και έστω u_1, u_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $Ker(A)$. Τα επεκτείνουμε σε μια βάση $\{u_1, u_2, u_3\}$ του V και σύμφωνα με τα παραπάνω η αντίστοιχη παραγόμενη βάση του $\bigwedge^2 V$ θα είναι η $\{u_1 \wedge u_2, u_2 \wedge u_3, u_3 \wedge u_1\}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$a = \lambda_1 u_2 \wedge u_3 + \lambda_2 u_3 \wedge u_1 + \lambda_3 u_1 \wedge u_2$$

Όμως $0 = a \wedge u_1 = \lambda_1 u_2 \wedge u_3 \wedge u_1$, οπότε $\lambda_1 = 0$. Ομοίως, $0 = a \wedge u_2 = \lambda_2 u_3 \wedge u_1 \wedge u_2$, οπότε $\lambda_2 = 0$ και $a = \lambda_3 u_1 \wedge u_2$ που είναι αποσυνθέσιμο.

Τώρα υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για την περίπτωση ενός διανυσματικού χώρου διάστασης μικρότερης ή ίσης με n και έστω ένας διανυσματικός χώρος V με διάσταση $dimV = n + 1$ με βάση $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$. Έστω $V' \leq V$ ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $\{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$. Προφανώς $dimV' = n$ και η $\{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ είναι μια βάση του V'. Ως προς αυτή τη βάση μπορούμε να γράψουμε

$$a = \sum_{i<j}^{n-1} a_{ij} v_i \wedge v_j = \sum_{i<j\leq n-1} a_{ij} v_i \wedge v_j + \sum_{i=0}^{n-1} a_{in} v_i \wedge v_n = a' + u \wedge v_n$$

για $a' \in \bigwedge^2 V'$ και $u \in V'$.

Αν $a' = 0$, τότε $a = u \wedge v_n$, οπότε το a είναι αποσυνθέσιμο, οπότε υποθέτουμε ότι $a' \neq 0$.

Αφού $a \wedge a = 0$, έχουμε

$$0 = (a' + u \wedge v_n) \wedge (a' + u \wedge v_n) = a' \wedge a' + 2u \wedge v_n \wedge a'$$

Όμως αφού το $a' \wedge a'$ δεν περιλαμβάνει το v_n, πρέπει να ισχύει $a' \wedge a' = 0$ και $u \wedge v_n \wedge a' = 0$.

Από επαγωγή $a' = u'_1 \wedge u'_2$ για κάποια u'_1, $u'_2 \in V'$, οπότε

$$u \wedge v_n \wedge u'_1 \wedge u'_2 = 0.$$

Έτσι, από την Πρόταση 10.1.2 προκύπτει ότι αυτά τα 4 διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αφού $v_n \notin V'$ αλλά τα υπόλοιπα 3 διανύσματα ανήκουν στον V', θα πρέπει τα διανύσματα u, u'_1, u'_2 να είναι γραμμικά εξαρτημένα. Έστω W

ο 3-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα v_n, u_1' και u_2'. Τότε $u \in W$ αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των u_1' και u_2'.

Τώρα $a = a' + u \wedge v_n = u_1' \wedge u_2' + u \wedge v_n \in \bigwedge^2 W$. Όμως αφού $dimW = 3$, το διάνυσμα a είναι αποσυνθέσιμο όπως δείξαμε παραπάνω. $\square$

11.2 Η γεωμετρική ερμηνεία της τετραγωνικής Klein

Στην περίπτωση που $dimV = 4$, (οπότε $dimP(V) = 3$), τότε $dim \bigwedge^4 V = 1$, οπότε η εξίσωση $(\bigwedge^4 V \ni) a \wedge a = 0$ είναι μια εξίσωση για το a. Επιλέγοντας μια βάση $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ του V, μπορούμε να γράψουμε

$$a = x_1 v_0 \wedge v_1 + x_2 v_0 \wedge v_2 + x_3 v_0 \wedge v_3 + y_1 v_2 \wedge v_3 + y_2 v_3 \wedge v_1 + y_3 v_1 \wedge v_2$$

οπότε τότε

$$a \wedge a = 2x_1 y_1 v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 + 2x_2 y_2 v_0 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_1 + 2x_3 y_3 v_0 \wedge v_3 \wedge v_1 \wedge v_2 =$$

$$= 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$$

οπότε η εξίσωση $a \wedge a = 0$ δίδεται από τη σχέση

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$$

Έχουμε συνεπώς το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1. Οι προβολικές ευθείες σε έναν προβολικό χώρο διάστασης 3 βρίσκονται σε αντιστοιχία 1-1 με τη μη-εκφυλισμένη τετραγωνική $a \wedge a$ του πενταδιάστατου προβολικού χώρου $P(\bigwedge^2 V)$.

Απόδειξη: Κάθε προβολική ευθεία καθορίζει ένα 2-διάστατο υπόχωρο $U \leq V$ που δίδει ένα αποσυνθέσιμο διάνυσμα $a = u_1 \wedge u_2 \in \bigwedge^2 V$. Από την Πρόταση 11.1.1 αυτό δίδει μια αντιστοιχία 1-1 μεταξύ του διανυσματικού υποχώρου U και του σημείου του $P(\bigwedge^2 V)$ που αναπαρίσταται από το a. Από το Θεώρημα 11.1.1 τα αποσυνθέσιμα 2-διανύσματα είναι εκείνα που ικανοποιούν τη σχέση $a \wedge a = 0$ και υπάρχει μια βάση ως προς την οποία αυτή η εξίσωση έχει τη μορφή

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$$

ή ισοδύναμα

$$z_0^2 - z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 - z_5^2 = 0$$

η οποία είναι μια μη-εκφυλισμένη καμπύλη β΄ βαθμού. $\square$

Η παραπάνω ονομάζεται *τετραγωνική Klein (Klein quadric)* και θα την συμβολίζουμε με $Q(V)$. Η τετραγωνική αυτή ανακαλύφθηκε από τον Felix Klein (1849-1925), η εργασία του οποίου βασίστηκε σε προηγούμενη δουλειά του επιβλέποντός του καθηγητή Julius Plücker.

Αν $dimV = n > 4$, τότε υπάρχουν $\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix}$ εξισώσεις που περιλαμβάνονται στην εξίσωση $a \wedge a = 0$, αλλά υπάρχουν πολλές εξ αυτών που είναι ανεξάρτητες. Παρ΄ ότι μπορούμε να γράψουμε με εκπεφρασμένο τρόπο τις εξισώσεις που ορίζουν τα αποσυνθέσιμα διανύσματα του $P(\bigwedge^2 V)$, η γεωμετρική φύση του χώρου των ευθειών σε αυτή την περίπτωση είναι αρκετά πιο πολύπλοκη.

Σημείωση 1: Εάν $dimV = n$, τότε κάθε $a \in \bigwedge^{n-1} V$ είναι αποσυνθέσιμο.

12 Γραμμικοί Υπόχωροι της Τετραγωνικής Klein

12.1 Γεωμετρική ερμηνεία των υποχώρων της Τετραγωνικής Klein

Όταν μελετήσαμε τις τετραγωνικές στην παράγραφο 8 είδαμε ότι μια τετραγωνική σε έναν προβολικό χώρο διάστασης 5 έχει επίπεδα (άρα και ευθείες) που βρίσκονται εξ ολοκλήρου μέσα σε αυτήν. Είδαμε επίσης στην προηγούμενη παράγραφο ότι τα *σημεία* της τετραγωνικής Klein $Q(V)$ αντιστοιχούν με τρόπο 1-1 στις ευθείες του 3-διάστατου προβολικού χώρου $P(V)$ (άρα $dimV = 4$). Θα δούμε επίσης πως τόσο οι *ευθείες* όσο και τα *επίπεδα* της τετραγωνικής επιδέχονται γεωμετρικής ερμηνείας στον $P(V)$. Θα ξεκινήσουμε με τις ιδιότητες τομής των ευθειών.

Πρόταση 1. Δύο ευθείες στον $P(V)$ τέμνονται εάν και μόνο εάν η ευθεία που ενώνει τα αντίστοιχα σημεία p και q στην τετραγωνική Klein $Q(V)$ βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην $Q(V)$.

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε πως $dimV = 4$ και $dimP(V) = 3$. Έστω U_1, $U_2 \leq V$ δύο 2-διάστατοι διανυσματικοί υπόχωροι που αντιστοιχούν στις προβολικές ευθείες του $P(V)$. Αν οι δύο ευθείες τέμνονται, τότε υπάρχει κάποιο μη-μηδενικό διάνυσμα $u \in U_1 \cap U_2$. Το επεκτείνουμε σε μια βάση $\{u, u_1\}$ του U_1 και $\{u, u_2\}$ του U_2 και θέτουμε $a_1 = u \wedge u_1$ και $a_2 = u \wedge u_2$. Αυτά (τα a_1 και a_2) είναι αντιπροσωπευτικά διανύσματα για τα δύο σημεία p και q στην $Q(V)$.

Η ευθεία του $P(\bigwedge^2 V)$ που ενώνει αυτά τα δύο σημεία είναι ο 2-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\bigwedge^2 V$ που αποτελείται από τα 2-διανύσματα της μορφής $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = u \wedge (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$. Αφού είναι αποσυνθέσιμα, τότε $a \wedge a = 0$, συνεπώς ολόκληρη η ευθεία βρίσκεται εντός της τετραγωνικής.

Αντίστροφα, έστω ότι οι ευθείες στον $P(V)$ δεν τέμνονται. Τότε $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ και $dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2 = 4$, οπότε $V = U_1 + U_2$ (όπου με το σύμβολο της ισότητας στην πραγματικότητα εννοούμε ότι οι διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι) και μια βάση $\{u_0, u_1\}$ του U_1 και $\{u_2, u_3\}$ του U_2 δίδει μια βάση του V. Στην περίπτωση αυτή, αν

$$a = \lambda_1 u_0 \wedge u_1 + \lambda_2 u_2 \wedge u_3,$$

τότε

$$a \wedge a = 2\lambda_1 \lambda_2 u_0 \wedge u_1 \wedge_2 \wedge u_3$$

το οποίο μηδενίζεται εάν και μόνο εάν $\lambda_1 = 0$ ή $\lambda_2 = 0$. Συνεπώς η ευθεία που ενώνει τα σημεία p και q συναντά την τετραγωνική $Q(V)$ μόνο στο σημείο p με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα $u_0 \wedge u_1$ ή μόνο στο σημείο q με αντιπροσωπευτικό διάνυσμα $u_2 \wedge u_3$ και δε βρίσκεται στην τετραγωνική Klein. $\square$

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο $x \in P(V)$, τότε οι ευθείες που διέρχονται από το x ορίζουν ένα υποσύνολο της τετραγωνικής $Q(V)$:

Πρόταση 2. Το σύνολο όλων των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $x \in P(V)$ συνιστά ένα επίπεδο το οποίο βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην τετραγωνική $Q(V)$.

Απόδειξη: Έστω v_0 αντιπροσωπευτικό διάνυσμα του σημείου $x \in P(V)$. Μια ευθεία που διέρχεται από το x αντιπροσωπεύεται από ένα 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του V που περιέχει το v_0. Αυτός είναι ο χώρος που παράγεται από το v_0 και κάποιο άλλο γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα, έστω v. Ο υπόχωρος αυτός αντιστοιχεί στο σημείο του $P(\bigwedge^2 V)$ που έχει ως αντιπροσωπευτικό διάνυσμα το 2-διάνυσμα $a = v_0 \wedge v$.

Επεκτείνουμε το v_0 σε μια βάση $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ του V και θεωρούμε τα σημεία της $Q(V)$ της μορφής

$$v_0 \wedge (\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_1 v_0 \wedge v_1 + \lambda_2 v_0 \wedge v_2 + \lambda_3 v_0 \wedge v_3$$

Αυτά αποτελούν έναν 3-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του V οπότε ορίζουν ένα επίπεδο στην $Q(V)$. $\square$

Δεν είναι όμως όλα τα επίπεδα της τετραγωνικής της παραπάνω μορφής.

Πρόταση 3. Έστω π ένα επίπεδο της $Q(V)$. Τότε το π αποτελείται είτε από τις ευθείες που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο του $P(V)$ είτε από τις ευθείες που περιέχονται σε ένα σταθερό επίπεδο του $P(V)$.

Απόδειξη: Έστω π το επίπεδο που περιέχεται εξ ολοκλήρου στην $Q(V)$ και έστω p, q, r τρία διαφορετικά μη-συνευθειακά σημεία του π. Αφού η ευθεία που ενώνει τα p και q βρίσκεται στο π και το π βρίσκεται στην $Q(V)$, τότε από την Πρόταση 12.1.1, οι ευθείες του $P(V)$ που αντιστοιχούν στα σημεία p και q πρέπει να τέμνονται σε κάποιο σημείο, έστω x. Ανάλογα, η ευθεία r (η ευθεία που αντιστοιχεί στο σημείο r), πρέπει να τέμνει τις ευθείες p και q. Διακρίνουμε στη συνέχεια δύο περιπτώσεις:
(i) Η ευθεία r τέμνει τις ευθείες p και q στο ίδιο σημείο x.

(ii) Η ευθεία r τέμνει τις ευθείες p και q σε διαφορετικά σημεία.

Εστω ότι ισχύει η περίπτωση **(i)**. Έστω v_0 ένα αντιπροσωπευτικό διάνυσμα του σημείου x και έστω ότι ο 2-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα v_0 και v_1 ορίζει την ευθεία p. Έστω ακόμη ότι ο 2-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα v_0 και v_2 ορίζει την ευθεία q. Αν η ευθεία r διέρχεται από το σημείο x, τότε ορίζεται από το 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από το v_0 και κάποιο άλλο διάνυσμα, έστω v_3. Ισχύει φυσικά ότι το επίπεδο $\pi \subset P(\bigwedge^2 V)$, οπότε το π ορίζεται από τον 3-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από τα $v_0 \wedge v_1$, $v_0 \wedge v_2$, και $v_0 \wedge v_3$, δηλαδή από ένα διάνυσμα της μορφής

$$v_0 \wedge (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)$$

Αυτές όμως είναι οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο x.

Εστω ότι ισχύει η περίπτωση **(ii)**. Αν η ευθεία r τέμνει τις ευθείες p και q σε διαφορετικά σημεία, τότε μπορούμε να επιλέξουμε τα διανύσματα v_1 και v_2 ως αντιπροσωπευτικά διανύσματα των δύο αυτών σημείων έτσι ώστε η ευθεία r να έχει αντιπροσωπευτικό 2-διάνυσμα το $v_1 \wedge v_2 \in \bigwedge^2 V$. Το επίπεδο π ορίζεται συνεπώς από τον 3-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο των διανυσμάτων της μορφής

$$\lambda_1 v_0 \wedge v_1 + \lambda_2 v_0 \wedge v_2 + \lambda_3 v_1 \wedge v_2$$

Εάν συμβολίσουμε με W τον 3-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του V που παράγεται από τα διανύσματα $\{v_0, v_1, v_2\}$, τότε θα ισχύει ότι $\bigwedge^2 W \subset \bigwedge^2 V$, οπότε αναπαριστά όλες τις ευθείες του $P(V)$ που βρίσκονται στο επίπεδο $P(W)$. $\square$

Υπάρχει μια καλή εξήγηση γιατί υπάρχουν *μόνο δύο* οικογένειες επιπέδων στην τετραγωνική. Αφού μια ευθεία του $P(V)$ ορίζεται από ένα 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο $U \leq V$, ο μηδενιστής $U^0 \leq V^*$ είναι επίσης διάστασης 2 και ορίζει μια ευθεία στον $P(V)^*$. Συνεπώς οι ευθείες του $P(V)$ βρίσκονται σε αντιστοιχία 1-1 με τις ευθείες του δυϊκού προβολικού χώρου $P(V)^*$ οπότε αν τα σημεία του $P(V)$ αντιπροσωπεύονται από επίπεδα της τετραγωνικής $Q(V)$, τότε το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για τα σημεία του $P(V)^*$ (δηλαδή για τα επίπεδα του $P(V)$).

Αυτές οι δύο οικογένειες επιπέδων είναι αντίστοιχες με τις δύο οικογένειες των ευθειών μιας τετραγωνικής σε έναν 3-διάστατο προβολικό χώρο (βλ. την παράγραφο 8). Ονομάζονται α-επίπεδα (αυτά που αντιστοιχούν στα σημεία του $P(V)$) και β-επίπεδα (αυτά που αντιστοιχούν στα επίπεδα του $P(V)$). Η τομή δύο α-επιπέδων είναι το σύνολο των ευθειών του $P(V)$ που διέρχονται από

δύο σημεία x και y. Αν τα x και y είναι διαφορετικά, τότε υπάρχει μόνο μια τέτοια ευθεία, οπότε τα δύο α-επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο. Ανάλογα, δύο β-επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο.

Η τομή ενός α-επιπέδου με ένα β-επίπεδο αποτελείται από το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο $x \in P(V)$ και βρίσκονται σε ένα επίπεδο $P(W) \subset P(V)$. Αν το σημείο x δεν περιέχεται στο επίπεδο, τότε η τομή είναι το κενό σύνολο. Αν το σημείο x περιέχεται στο επίπεδο, τότε αν υποθέσουμε ότι το x έχει αντιπροσωπευτικό διάνυσμα το v_0 και ότι ο τρισδιάστατος διανυσματικός υπόχωρος W έχει βάση την $\{v_0, v_1, v_2\}$, τότε οι απαιτούμενες ευθείες έχουν αντιπροσωπευτικά διανύσματα στον $\bigwedge^2 V$ της μορφής

$$v_0 \wedge (\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 v_0 \wedge v_1 + \lambda_2 v_0 \wedge v_2$$

οπότε συνιστούν μια (προβολική) ευθεία.

12.2 Σχόλια

Εγκυκλοπαιδικά αναφέρουμε ότι τα α-επίπεδα και τα β-επίπεδα παρουσιάζουν σημαντικό ενδιαφέρον στα πλαίσια της *συστροφικής γεωμετρίας* (twistor geometry) του Roger Penrose. Αυτό με τη σειρά του έχει σαν αποτέλεσμα τα επίπεδα αυτά να παίζουν ουσιαστικό ρόλο στις παρακάτω δύο περιπτώσεις στη σύγχρονη (state of the art όπως λέγεται) έρευνα:

1. *Στην κοσμολογία*, και πιο συγκεκριμένα στην πιο προχωρημένη διατύπωση των εξισώσεων Einstein για το βαρυτικό πεδίο με τη χρήση της συστροφικής γεωμετρίας.

2. Στην περίφημη, όπως αναφέρεται στη σύγχρονη βιβλιογραφία, *κατασκευή ADHM*, από τα αρχικά των ονομάτων *Atiyah-Drienfeld-Hitchin-Manin* που δίδει τις λύσεις των λεγόμενων *ίνσταντονς* (instantons, *τοπολογικά σωμάτια ή ψευδο-σωμάτια*) σε Ρημάνειες πολλαπλότητες. Η κατασκευή ADHM με τη σειρά της αποτέλεσε τη βάση της εκπληκτικής δουλειάς του Simon K. Donaldson που απάντησε θετικά στην εικασία Poincaré για την περίπτωση των πολλαπλοτήτων διάστασης 4 και κατηγοριοποίησε πλήρως τις απλά συνεκτικές (λείες) πολλαπλότητες στην ίδια διάσταση. Η δουλειά του Simon K. Donaldson, εκτός από την προφανή σημασία της για τη σύγχρονη γεωμετρία, έχει επίσης βαθειά σχέση και με την θεωρητική φυσική (ιδιαίτερα δε με την κοσμολογία), λόγω του ότι όπως μας εδίδαξε ο A. Einstein, ο χωρόχρονος που ζούμε και βρίσκεται το σύμπαν, αποτελεί πολλαπλότητα ακριβώς διάστασης 4. Επίσης από τη δουλειά του Simon K. Donaldson, προήλθαν οι λεγόμενες *τοπολογικές*

κβαντικές θεωρίες των S.K. Donaldson, A. Floer, M. Gromov, M. Kontsevich και E. Witten, που αποτελούν μέχρι σήμερα, (μαζί με την κβαντομηχανική των μελανών οπών του S. Hawking μερικά χρόνια νωρίτερα), το σημαντικότερο βήμα προς την κατεύθυνση της *ενοποίησης* όλων των φυσικών αλληλεπιδράσεων.

Το κύριο πρόβλημα στην ενοποίηση των φυσικών αλληλεπιδράσεων οφείλεται στην *ασυμβατότητα* της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας του A. Einstein που περιγράφει τη βαρυτική αλληλεπίδραση, με τις κβαντικές θεωρίες των ηλεκτρασθενών και των ισχυρών πυρηνικών αλληλεπιδράσεων. Απλουστεύοντας, θα λέγαμε ότι οι τοπολογικές κβαντικές θεωρίες επιλύουν αυτή την ασυμβατότητα περίπου κατά το ήμισι διότι είναι τα μοναδικά μέχρι στιγμής γνωστά παραδείγματα κβαντικών θεωριών στις οποίες ισχύει η *αρχή του γενικού συναλλοιώτου* (principle of general covariance) της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Η δεύτερη θεμελιώδης αρχή της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας είναι η *(ισχυρή) αρχή της ισοδυναμίας* ((strong) equivalence principle). Η αρχή αυτή σχετίζει την αδρανειακή με τη βαρυτική μάζα των σωμάτων και είναι η αρχή αυτή που δεν έχει ενσωματωθεί ακόμη στις κβαντικές θεωρίες και δημιουργεί μεγάλα προβλήματα στην κατανόηση της μάζας και κατ΄ επέκταση στην κοσμολογία (θέματα που αφορούν την λεγόμενη *σκοτεινή ενέργεια* (dark energy) και την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς).

Φύλλο Ασκήσεων Γ.

(1). Εάν $a \in \bigwedge^p V$ και το p είναι περιττός, δείξτε ότι $a \wedge a = 0$.

(2). Υπολογίστε το $a \wedge b$ στις παρακάτω περιπτώσεις (τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα):
α. $a = b = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_1$
β. $a = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_1$ και $b = v_2 \wedge v_3 \wedge v_4$
γ. $a = v_1 + v_2 + v_3$, και $b = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_1$.

(3). Ποια από τα παρακάτω 2 διανύσματα είναι αποσυνθέσιμα; (τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα)
α. $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3$
β. $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4$
γ. $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 + v_4 \wedge v_1$.

(4). Εάν $dimV = n$, δείξτε ότι κάθε $a \in \bigwedge^{n-1} V$ είναι αποσυνθέσιμο.

(5). Έστω $l \subset P(V)$ μια ευθεία και m μια άλλη ευθεία τέτοια ώστε το αντίστοιχο σημείο $M \in Q$ της τετραγωνικής Klein να βρίσκεται στο πολικό υπερεπίπεδο στο $L \in Q$. Δείξτε ότι οι ευθείες l και m τέμνονται.

13 Προσέγγιση Klein της Γεωμετρίας και Ομοπαραλληλική Γεωμετρία

13.1 Ο ρόλος των ομάδων μετασχηματισμών

Η συνεισφορά του Felix Klein στη Γεωμετρία δεν περιορίζεται μόνο στην τετραγωνική που είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο και που φέρει τιμητικά το όνομά του, ούτε μόνο στη μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια που επίσης φέρει το ονομά του, τη γνωστή *φιάλη Klein* (Klein bottle). Εισήγαγε ένα νέο τρόπο προσέγγισης της γεωμετρίας χρησιμοποιώντας *θεωρία ομάδων*, (το γνωστό Πρόγραμμα Erlangen, το όνομα του προγράμματος προήλθε από την πόλη της Ν. Γερμανίας Erlangen κοντά στη Νυρεμβέργη, στο πανεπιστήμιο της οποίας ο Felix Klein έγινε καθηγητής το 1872).

Καταλαβαίνει εύκολα κάποιος ακόμη και από την ετυμολογία της λέξης, πως ο κλάδος της γεωμετρίας έχει να κάνει με την μέτρηση αποστάσεων. Το πρωταρχικό πρόβλημα που αντιμετώπισε λοιπόν ο F. Klein εντοπίστηκε στην περιγραφή του τι είναι η γεωμετρία, ειδικά η προβολική γεωμετρία, επειδή ακριβώς, όπως είδαμε στην παράγραφο 4, οι έννοιες της *απόστασης* και της *γωνίας* δεν έχουν νόημα στην προβολική γεωμετρία!

Αντανακλά η απάντηση τη φύση της ίδιας της προβολικής γεωμετρίας. Ο φίλος μας ο καλλιτέχνης της Αναγέννησης για παράδειγμα που ενδιαφερόταν για τις διαφορετικές κατόψεις ενός αντικειμένου, δημιουργεί για πρώτη φορά το ερώτημα σχετικά με το *ποιες ιδιότητες ενός αντικειμένου παραμένουν αμετάβλητες σε αλλαγές κατόψεων.*

Είδαμε κατά τη διάρκεια του μαθήματος ότι δύο διαφορετικές κατόψεις ενός αντικειμένου όταν αναπαρίστανται στο επίπεδο συνδέονται μέσω ενός προβολικού μετασχηματισμού. Η αυστηρή μαθηματική διατύπωση συνεπώς του παραπάνω ερωτήματος αφορά *το πλήθος των ιδιοτήτων που παραμένουν αμετάβλητές κάτω από προβολικούς μετασχηματισμούς.*

Η προσέγγιση Klein της γεωμετρίας ήταν η μελέτη αναλλοίωτων ποσοτήτων κάτω από συγκεκριμένες ομάδες μετασχηματισμών.

Αν υιοθετήσει κανείς αυτή την προσέγγιση της γεωμετρίας, το πρώτο ζητούμενο είναι ο καθορισμός της ομάδας μετασχηματισμών.

13.2 Η Ομάδα GL_n των Γενικών Γραμμικών Μετασχηματισμών

Στην περίπτωση της προβολικής γεωμετρίας, εάν V είναι ένας πραγματικός (χωρίς βλάβη της γενικότητας) διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $dimV = n$, και εάν με $P(V)$ συμβολίσουμε τον αντίστοιχο προβολικό χώρο αυτού ($dimP(V) = n - 1$), τότε ένας *προβολικός μετασχηματισμός* $\tau : P(V) \to P(V)$ ορίζεται μέσω ενός *αντιστρέψιμου γραμμικού μετασχηματισμού* $T : V \to V$ (βλ. Ορισμό 4.1.2).

Γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα πως δοθέντος ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης $dimV = n$, το σύνολο όλων των *γραμμικών απεικονίσεων* $L(V) := \{f : V \to V | f$ γραμμική απεικόνιση $\}$ αποτελεί επίσης διανυσματικό χώρο με σώμα ίδιο με το σώμα του V (εν προκειμένω ως σώμα θεωρούμε το σώμα των πραγματικών αριθμών). Οι πράξεις στον $L(V)$ ορίζονται με τον προφανή τρόπο: ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζεται ως

$$(\lambda f)(v) := \lambda[f(v)],$$

όπου $f \in L(V)$, $v \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, και το άθροισμα ορίζεται ως

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v),$$

όπου $f, g \in L(V)$ και $v \in V$. Αν $dimV = n$, τότε $dimL(V) = n^2$.

Επίσης από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε και τα εξής: αν V πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης n, τότε ισχύει ο ισομορφισμός $V \cong \mathbb{R}^n$ (θεώρημα 3.1.1). Με την επιλογή *βάσεων* στον V, κάθε γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν $n \times n$ πραγματικό τετραγωνικό πίνακα. Συμβολίζουμε με $M_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με πραγματικά στοιχεία. Το σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ αποτελεί επίσης διανυσματικό χώρο με σώμα το σώμα των πραγματικών αριθμών και πράξεις τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού $\cdot$ πίνακα (ως βαθμωτό πολλαπλασιασμό) και τη γνωστή πρόσθεση πινάκων. Αποδεικνύεται εύκολα πως ($dimV = n$) οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $L(V)$ και $M_n(\mathbb{R})$ είναι ισόμορφοι:

$$L(V) \cong L(\mathbb{R}^n) \cong M_n(\mathbb{R}).$$

Ένας *αντιστρέψιμος* γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ είναι το ίδιο πράγμα με έναν *ισομορφισμό*. Εάν V πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης n όπως παραπάνω, συμβολίζουμε με $L_I(V)$ το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων (δηλαδή ισομορφισμών) $L_I(V) := \{T : V \to V | T$

ισομορφισμός }. *Αποδεικνύεται εύκολα πως το σύνολο $L_I(V)$ αποτελεί (μη-Αβελιανή) ομάδα με πράξη τη σύνθεση των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων (ισομορφισμών).*

Εάν επιλέξουμε βάσεις στον V, τότε οι *αντιστρέψιμοι γραμμικοί μετασχηματισμοί* αναπαρίστανται με *αντιστρέψιμους* τετραγωνικούς $n \times n$ πραγματικούς πίνακες. *Ένας τετραγωνικός πραγματικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν έχει μη-μηδενική ορίζουσα.* Συμβολίζουμε με

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) | det(A) \neq 0\}$$

το σύνολο των αντιστρέψιμων (δηλαδή με μη-μηδενική ορίζουσα) $n \times n$ πραγματικών τετραγωνικών πινάκων. Προφανώς $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$. Με βάση τις ιδιότητες των οριζουσών, εύκολα διαπιστώνει κάποιος πως *το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ αποτελεί (μη-Αβελιανή) ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιαμό των πινάκων.* Τέλος με $SL_n(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε το σύνολο των $n \times n$ πραγματικών πινάκων με ορίζουσα 1. Εύκολα αποδεικνύεται ότι και αυτοί αποτελούν (μη-Αβελιανή) ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων (διότι $det(AB) = det(A)det(B)$ οπότε το γινόμενο πινάκων με ορίζουσα 1 είναι ένας νέος πίνακας με μοναδιαία ορίζουσα). Προφανώς $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$.

Αποδεικνύεται επίσης πως οι ομάδες $L_I(V)$ και $GL_n(\mathbb{R})$ είναι *ισόμορφες* $L_I(V) \simeq GL_n(\mathbb{R})$ $(dimV = n)$. Η έννοια του ισομορφισμού μεταξύ των ομάδων είναι κάπως διαφορετική από την έννοια του ισομορφισμού μεταξύ διανυσματικών χώρων. Υπενθυμίζουμε πως αν $(G, \circ)$ και $(H, \bullet)$ είναι δύο ομάδες με εσωτερικές πράξεις $\circ$ και $\bullet$, μια απεικόνιση $f : G \to H$ λέγεται *ομομορφισμός* εάν η f διατηρεί τις πράξεις των ομάδων, δηλαδή εάν ισχύει το εξής:

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2)$$

όπου $g_1, g_2 \in G$ και $f(g_1), f(g_2) \in H$. Ένας ομομορφισμός που είναι επιπλέον 1-1 και επί ονομάζεται *ισομορφισμός*.

Σημείωση 1: Ο διανυσματικός χώρος $M_n(\mathbb{R})$ εφοδιασμένος επιπλέον με την εσωτερική πράξη του πολλαπλασιασμού των πινάκων αποτελεί *(γραμμική) άλγεβρα*.

Ορισμός 1. Έστω $\mathbb{F}$ τυχαίο σώμα. Το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών (δηλαδή ισομορφισμών) $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ αποτελεί την ομάδα $GL_n(\mathbb{F})$ των γενικών γραμμικών μετασχηματισμών (General Linear group). Η εσωτερική πράξη της ομάδας είναι η σύνθεση απεικονίσεων. Με βάση τα όσα εκθέσαμε παραπάνω για την περίπτωση $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, η ομάδα $GL_n(\mathbb{F})$

μπορεί να ταυτιστεί με την ομάδα των αντιστρέψιμων (δηλαδή με μη-μηδενική ορίζουσα) $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$ και εσωτερική πράξη το γνωστό πολλαπλασιασμό των πινάκων.

Ας επαναλάβουμε τον σκοπό μας: θέλουμε να ορίσουμε το σύνολο των προβολικών μετασχηματισμών, οι οποίοι όπως είδαμε προκύπτουν από τους αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή από την ομάδα $GL_n(\mathbb{R})$. Θα δούμε πως το σύνολο των προβολικών μετασχηματισμών αποτελεί επίσης ομάδα η οποία προκύπτει από την ομάδα $GL_n(\mathbb{R})$. Πριν όμως από αυτό, χρειαζόμαστε ορισμένα στοιχεία από τη *θεωρία ομάδων*.

13.3 Στοιχεία Θεωρίας Ομάδων

Έστω $(G, *)$ πολλαπλασιαστική ομάδα, δηλαδή την πράξη $*$ της G θα τη λέμε πολλαπλασιασμό (χωρίς κατ' ανάγκη να ταυτίζεται με το γνωστό πολλαπλασιασμό, ενώ το ουδέτερο στοιχείο της πράξης θα το λέμε συμβολικά μονάδα και τα συμμετρικά στοιχεία θα τα συμβολίζουμε με το σύμβολο του αντίστροφου). Ένα υποσύνολο $N \subset G$ λέγεται *υποομάδα* εάν αποτελεί το ίδιο μια ομάδα με την ίδια πράξη $*$ όπως αυτή της G. Ουσιαστικά αυτό σημαίνει πως το N είναι κλειστό ως προς την πράξη αυτή, δηλαδή $n_1 * n_2 \in N$ για κάθε $n_1, n_2 \in N$. Αποδεικνύεται ότι *το υποσύνολο $N \subset G$ αποτελεί υποομάδα της ομάδας G εάν και μόνο εάν το N περιέχει το ουδέτερο στοιχείο $e = 1$ της πράξης $*$ καθώς και τα συμμετρικά όλων των στοιχείων του*, δηλαδή εάν $e = 1 \in N$ και εάν $\forall n \in N$, το συμετρικό $n^{-1} \in N$.

Στην ομάδα $(G, *)$ ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ που λέγεται *συζυγία*, ως εξής:

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists x \in G | g_1 = x g_2 x^{-1}.$$

Μια υποομάδα N της ομάδας G θα λέγεται *κανονική υποομάδα* και θα συμβολίζεται $N \lhd G$, εάν ισχύει το εξής: $\forall n \in N$ και $\forall g \in G$ ισχύει ότι $g * n * g^{-1} \in N$, δηλαδή με άλλα λόγια μια υποομάδα είναι κανονική εάν και μόνο εάν περιλαμβάνει όλα τα συζυγή στοιχεία των στοιχείων της.

Σημείωση 1: Στις Αβελιανές ομάδες, κάθε υποομάδα είναι κανονική διότι $g * n * g^{-1} = g * g^{-1} * n = 1 * n = n \in N$.

Έστω N υποομάδα (όχι κατ' ανάγκη κανονική) της ομάδας G. Ορίζουμε την εξής απεικόνιση

$$N \times G \to G, (n, g) \mapsto n * g$$

που λέγεται *πολλαπλασιασμός από αριστερά με την* N. (Επειδή γενικά οι ομάδες δεν είναι Αβελιανές, έχει σημασία από ποιά μεριά, δεξιά ή αριστερά, πολλαπλασιάζουμε).

Για κάθε στοιχείο $g \in G$, ορίζουμε το υποσύνολο $G_g := \{x \in G | x = g * y, \forall y \in G\}$ που λέγεται *(δεξιά) τροχιά του* g. Δηλαδή η δεξιά τροχιά ενός στοιχείου $g \in G$ είναι το υποσύνολο $G_g \subset G$ που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε το g από δεξιά με όλα τα στοιχεία του G.

Εάν N μια υποομάδα της G, τότε οι τροχιές των στοιχείων της N λέγονται *(αριστερά) συνσύνολα (cosets)* της N στην G. Συνεπώς δύο στοιχεία $g_1, g_2 \in G$ θα ανήκουν στο ίδιο (αριστερό) συνσύνολο της N στην G εάν και μόνο εάν $g_2 = n * g_1$ για κάποιο στοιχείο $n \in N$, δηλαδή ισοδύναμα εάν το $g_2 * g_1^{-1} \in N$. Η έννοια του συνσυνόλου αποδεικνύεται πως ορίζει μια δεύτερη σχέση ισοδυναμίας στην ομάδα G (διαφορετική της συζυγίας που είδαμε πιο πάνω) που λέγεται *αριστερό συνσύνολο της* G *από την υποομάδα* N: δύο στοιχεία θα είναι ισοδύναμα εάν ανήκουν στο ίδιο (αριστερό) συνσύνολο. Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα αριστερά συνσύνολα ενώ το *σύνολο πηλίκο* αυτής της σχέσης ισοδυναμίας θα το συμβολίζουμε με G/N.

Ισχύει το παρακάτω βασικό θεώρημα στη θεωρία ομάδων (το δίδουμε χωρίς απόδειξη, ο αναγνώστης μπορεί να κοιτάξει για την απόδειξη σε ένα καλό βιβλίο άλγεβρας, λόγου χάριν στον πρώτο τόμο της Άλγεβρας των Bourbaki ή στο βιβλίο Άλγεβρας των MacLane-Birkhoff):

Θεώρημα 1. *Το σύνολο πηλίκο* G/N *αποτελεί νέα ομάδα εάν και μόνο εάν το* N *είναι κανονική υποομάδα της ομάδας* G.

Η επαγόμενη πράξη (που θα τη συμβολίζουμε επίσης $*$) στην ομάδα G/N ορίζεται ως εξής: εάν $A, B \in G/N$, δηλαδή $A = N * a$, και $B = N * b$ οι τροχιές κάποιων στοιχείων $a, b \in N$, τότε $A * B := N * (a * b)$, δηλαδή το $A * B$ είναι το στοιχείο που αντιστοιχεί στην τροχιά του $a * b$, δηλαδή η απεικόνιση $p : G \to G/N$ με $g \mapsto N * g$ έχει πυρήνα το N και είναι επί.

13.4 Η Ομάδα των Προβολικών Μετασχηματισμών PGL_n

Στην ομάδα $GL_n(\mathbb{R})$ θεωρούμε το υποσύνολο λI, όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και I ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας (δηλαδή $I_{ij} = \delta_{ij}$, όπου δ_{ij} το γνωστό δέλτα του

Kronecker, με $i, j = 1, 2, ..., n$). Δηλαδή λI είναι το σύνολο όλων των μη-μηδενικών βαθμωτών πολλαπλασίων του μοναδιαίου πίνακα, ισοδύναμα το λI είναι το σύνολο των μη-μηδενικών *διαγώνιων* $n \times n$ πραγματικών πινάκων.

Εύκολα διαπιστώνει κάποιος πως το σύνολο λI αποτελεί *υποομάδα* της $GL_n(\mathbb{R})$, (διότι το γινόμενο διαγώνιων πινάκων είναι επίσης διαγώνιος πίνακας, δηλαδή το σύνολο λI είναι κλειστό ως προς την πράξη του γνωστού πολλαπλασιασμού των πινάκων), και μάλιστα *κανονική υποομάδα*, δηλαδή $\lambda I \lhd GL_n(\mathbb{R})$.

Τώρα από τον ορισμό των προβολικών μετασχηματισμών μέσω αντιστρεπτών γραμμικών μετασχηματισμών (βλ. Ορισμό 4.1.1), προκύπτει άμεσα η Σημείωση 4.1.1 που λέει ότι δύο αντιστρέψιμοι γραμμικοί μετασχηματισμοί που ο ένας είναι το βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου ορίζουν τον ίδιο προβολικό μετασχηματισμό. Συνεπώς οι προβολικοί μετασχηματισμοί προκύπτουν ως το πηλίκο $GL_n(\mathbb{R})/\lambda I$, το οποίο πηλίκο, με βάση το θεώρημα 13.3.1 παραπάνω αποτελεί νέα ομάδα διότι $\lambda I \lhd GL_n(\mathbb{R})$. Έχουμε λοιπόν τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1. Η προβολική γενική γραμμική ομάδα $PGL_n(\mathbb{R})$ (Projective General Linear group), είναι η ομάδα πηλίκο της ομάδας των γενικών γραμμικών μετασχηματισμών *δια* την κανονική υποομάδα των μη-μηδενικών βαθμωτών πολλαπλασίων του μοναδιαίου πίνακα, δηλαδή

$$PGL_n(\mathbb{R}) = \frac{GL_n(\mathbb{R})}{\lambda I}.$$

Ορισμός 2. Έστω Ω κάποιο μη-κενό σύνολο. Συμβολίζουμε με $Sym(\Omega)$ το σύνολο όλων των απεικονίσεων 1-1 και επί από το Ω στον εαυτό του, δηλαδή $Sym(\Omega) := \{\omega : \Omega \to \Omega | \omega$ απεικόνιση 1-1 και επί $\}$.

Το σύνολο $Sym(\Omega)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση των απεικονίσεων, ουδέτερο στοιχείο είναι η ταυτοτική απεικόνιση (κάθε στοιχείο αντιστοιχεί στον εαυτό του) ενώ το συμμετρικό κάθε στοιχείου είναι η αντίστροφη απεικόνιση (η οποία υπάρχει διότι οι απεικονίσεις είναι 1-1 και επί).

Ορισμός 3. Μια *δράση* μιας ομάδας G σε ένα σύνολο Ω είναι ένας ομομορφισμός ομάδων $f : G \to Sym(\Omega)$.

Η προβολική γραμμική ομάδα $PGL_n(\mathbb{R})$ δρα τόσο στον προβολικό χώρο $P(\mathbb{R}^n)$ όσο και στο χώρο των (προβολικών) ευθειών του $P(\mathbb{R}^n)$ κλπ. Σύμφωνα με την προσέγγιση Klein της γεωμετρίας λοιπόν,

η (πραγματική) προβολική γεωμετρία συνίσταται στη μελέτη των ποσοτήτων που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τη δράση της ομάδας $PGL_n(\mathbb{R})$.

Σημείωση 1: Τα παραπάνω ισχύουν και για τυχαίο σώμα $\mathbb{F}$.

Έτσι για τον Klein, η γνωστή μας από το γυμνάσιο Ευκλείδεια γεωμετρία του επιπέδου, προκύπτει από ένα συνόλο (το γεωμετρικό επίπεδο $\mathbb{R}^2$) και μιας ομάδας μετασχηματισμών που δρα επ' αυτού, στην περίπτωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας του επιπέδου η ομάδα είναι η ομάδα των μετασχηματισμών

$$x \mapsto Ax + b,$$

όπου A ορθογώνιος πραγματικός 2×2 πίνακας ($A \in O(2)$) και $b \in \mathbb{R}^2$. Αυτοί οι μετασχηματισμοί πράγματι αποτελούν ομάδα διότι

$$A(A'x + b') + b = AA'x + A'b + b,$$

κάθε στοιχείο της ομάδας αποτελείται από την σύνθεση μιας στροφής του επιπέδου (πίνακας A) και μιας μετατώπισης b (στην φυσική αυτοί ονομάζονται *μετασχηματισμοί Γαλιλαίου*). Μια *διαφορετική* γεωμετρία στο επίπεδο μπορεί να οριστεί εάν θεωρήσουμε το ίδιο σύνολο $\mathbb{R}^2$ των σημείων του επιπέδου και τους μετασχηματισμούς της μορφής

$$x \mapsto Ax + b,$$

όπου τώρα ο A είναι απλά *αντιστρέψιμος* πίνακας ($A \in GL_2(\mathbb{R})$), αυτοί ονομάζονται *ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί* (affine transformations). Παρατηρήστε ότι το Πυθαγώρειο Θεώρημα (που στην ουσία συνοψίζει την Ευκλείδεια γεωμετρία), ενώ παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου, δεν παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους ομοπαραλληλικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι μετασχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο σε τυχαίο τρίγωνο, συνεπώς η γεωμετρία αυτή δεν είναι η Ευκλείδεια γεωμετρία. Ακόμη πιο ενδιαφέρον παράδειγμα αποτελεί το λεγόμενο υπερβολικό επίπεδο που θα δούμε αργότερα (η ομάδα μετασχηματισμών είναι η προβολική ομάδα που είδαμε παραπάνω). Ο Klein ήταν αρκετά εφυής για να δει ότι όλες αυτές οι γεωμετρίες αποτελούν μερικές περιπτώσεις της γενικής προσέγγισής του.

Όλα τα θεωρήματα που αποδείξαμε στο μάθημα είναι αναλλοίωτα κάτω από προβολικούς μετασχηματισμούς. Όταν ο Klein ανέφερε αναλλοίωτες ποσότητες εννούσε επίσης αριθμητικές ποσότητες όπως η περίπτωση του μήκους (απόστασης) δύο σημείων $x, y \in \mathbb{R}^2$ στην Ευκλείδεια γεωμετρία:

$$|(Ax + b) - (Ay + b)| = |A(x - y)| = |x - y|.$$

Στην προβολική γεωμετρία όμως είδαμε ότι δεν υπάρχει αναλλοίωτη απόσταση (μήκος). Παρά ταύτα υπάρχουν πιο πολύπλοκες αναλλοίωτες ποσότητες μερικές από τις οποίες θα δούμε αμέσως παρακάτω.

13.5 Η ομάδα των προβολικών μετασχηματισμών της ευθείας και Ομοπαραλληλικοί Μετασχηματισμοί

Θα μελετήσουμε την απλούστερη περίπτωση της πραγματικής προβολικής ευθείας $P(\mathbb{R}^2)$ και τη δράση πάνω σε αυτήν της ομάδας των προβολικών μετασχηματισμών $PGL_2(\mathbb{R})$.

Σε ομογενείς συντεταγμένες η δράση περιγράφεται ως εξής: $(\lambda_0, \lambda_1) \mapsto (a\lambda_0 + b\lambda_1, c\lambda_0 + d\lambda_1)$ Εάν θεωρήσουμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ ως διανύσματα γραμμές (δηλαδή πίνακες 1×2), τότε η παραπάνω δράση γράφεται με μορφή πινάκων ως εξής (η ομάδα δρα από δεξιά στα διανύσματα γραμμές):

$$(\lambda_0, \lambda_1) \mapsto (\lambda_0, \lambda_1) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (a\lambda_0 + b\lambda_1, c\lambda_0 + d\lambda_1).$$

Από το θεώρημα 4.2.1 γνωρίζουμε πως κάθε τριάδα διαφορετικών σημείων της προβολικής ευθείας μπορεί μέσω κατάλληλου προβολικού μετασχηματισμού να απεικονισθεί σε οποιαδήποτε άλλη τριάδα σημείων. Συνεπώς δεν υπάρχει τρόπος να διακρίνουμε ζεύγη ή τριάδες σημείων. Μπορούμε όμως να διακρίνουμε τετράδες διαφορετικών σημείων μέσω μιας αναλλοίωτης ποσότητας που λέγεται *σταυρωτό πηλίκο (cross-ratio)*:

Ορισμός 1. Έστω r_0, r_1, r_2, r_3 μια τετράδα διαφορετικών σημείων της προβολικής ευθείας $P(\mathbb{R}^2)$ με ομογενείς συντεταγμένες $r_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$. Το *σταυρωτό πηλίκο* ορίζεται ως εξής:

$$(r_0\ r_1; r_2\ r_3) := \frac{(x_0y_2 - x_2y_0)(x_1y_3 - x_3y_1)}{(x_0y_3 - x_3y_0)(x_1y_2 - x_2y_1)}.$$

Σημείωση 1: Αλλαγή του αντιπροσωπευτικού διανύσματος αφήνει την παραπάνω έκφραση αμετάβλητη, άρα είναι καλά ορισμένη.

Πρόταση 1. *Το σταυρωτό πηλίκο είναι αναλλοίωτο κάτω από προβολικούς μετασχηματισμούς*, δηλαδή εάν $\tau : P(\mathbb{R}^2) \to P(\mathbb{R}^2)$ είναι ένας προβολικός μετασχηματισμός, τότε $(\tau(r_0)\ \tau(r_1); \tau(r_2)\ \tau(r_3)) = (r_0\ r_1; r_2\ r_3)$.

Απόδειξη: Στα σημεία $r_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, εφαρμόζουμε έναν προβολικό μετασχηματισμό

$$(x_i, y_1) \mapsto (x_i', y_i') = (x_i, y_i) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (ax_i + by_i, cx_i + dy_i).$$

Από κάθε παρένθεση του ορισμού του σταυρωτού πηλίκου προκύπτει ένας παράγοντας $(ad - bc)$ (που είναι η ορίζουσα του πίνακα μετασχηματισμού), για παράδειγμα υπολογίζουμε τον παράγοντα

$$x_0'y_2' - x_2'y_0' = (ax_0 + by_0)(cx_2 + dy_2) - (ax_2 + by_2)(cx_0 + dy_0) = (ad - bc)(x_0y_2 - x_2y_0)$$

Όλοι αυτοί οι παράγοντες της ορίζουσας απλοποιούνται οπότε η αρχική έκφραση του σταυρωτού πηλίκου παραμένει αναλλοίωτη. $\square$

Για μια βαθύτερη κατανόηση του σταυρωτού πηλίκου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Klein για να απλοποιήσουμε τη γεωμετρία. Θεωρούμε την υποομάδα της $PGL_2(\mathbb{R})$ που αφήνει ένα σημείο, έστω $r_0 = (x_0, y_0)$, αμετάβλητο, δηλαδή σχηματικά θέλουμε να ισχύει $r_0A = r_0$. Παρατηρούμε πως αν το σημείο αυτό έχει ομογενείς συντεταγμένες $r_0 = (0, 1)$, η παραπάνω απαίτηση ικανοποιείται για κάθε πίνακα $A \in GL_2(\mathbb{R})$ της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

δηλαδή για πίνακες με $b = 0$ και $ad - bc \neq 0$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Πιο αναλυτικά θα έχουμε

$$(0, 1) \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = (0, d)$$

που στην προβολική ευθεία αντιστοιχεί στο ίδιο σημείο διότι οι ομογενείς συντεταγμένες διαφέρουν κατά ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο $(0, 1) \sim (0, d) = d(0, 1)$.

Έστω τώρα κάποιο τυχαίο σημείο της (πραγματικής) προβολικής ευθείας με ομογενείς συντεταγμένες $r = (x, y)$. Εφαρμόζουμε στο σημείο αυτό ένα μετασχηματισμό της παραπάνω μορφής

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

δηλαδή αναλυτικά

$$x \mapsto x' = ax$$

και

$$y \mapsto y' = cx + dy$$

Αν εξαιρέσουμε το σημείο $r_0 = (0, 1)$, μπορούμε να μεταβούμε σε ανομογενείς συντεταγμένες, έστω $q := x/y$, οπότε

$$q' = x'/y' = \frac{cx + dy}{ax} = \frac{c}{a} + \frac{d}{a}q = C + Dq$$

όπου θέσαμε $C := c/a$ και $D := d/a$. Με τη χρήση λοιπόν ανομογενών συντεταγμένων, καταλήξαμε συνεπώς στη δράση της λεγόμενης *ομοπαραλληλικής ομάδας μετασχηματισμών*

$$q \mapsto q' = Dq + C$$

Το σταυρωτό πηλίκο είναι συνεπώς μια αναλλοίωτη ποσότητα των τριών σημείων r_1, r_2, r_3 κάτω από τη δράση αυτής της ομάδας. Αν λοιπόν στον ορισμό του σταυρωτού πηλίκου παραπάνω αντικαταστήσουμε τις τιμές $r_0 = (x_0, y_0) = (0, 1)$ θα πάρουμε ότι

$$(r_0\ r_1; r_2\ r_3) := \frac{q_3 - q_1}{q_2 - q_1}$$

όπου θέσαμε $q_i := x_i/y_i$, με $i = 1, 2, 3$, οι αντίστοιχες ανομογενείς συντεταγμένες. Αν για απλοποίηση του συμβολισμού ξεχάσουμε πως η παραπάνω ευθεία είναι προβολική ευθεία και δούμε τα σημεία $r_i := x_i \in \mathbb{R}$, τότε θα πάρουμε πως

$$(x_0\ x_1; x_2\ x_3) := \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

που είναι η αρνητική τιμή του λόγου στον οποίο διαιρεί το σημείο x_1 το ευθύγραμμο τμήμα x_2x_3.

Ως ειδική περίπτωση θεωρούμε την προβολή από ένα σημείο του επιπέδου P που απεικονίζει μια ευθεία l σε μια άλλη ευθεία L (το P βρίσκεται εκτός των ευθειών). Τότε τα σημεία έστω $b, d, c, g \in l$ απεικονίζονται στα σημεία $B, D, C, G \in L$: $(bd; cg) = (BD; CG)$. Εάν κανένα από τα y_i στον ορισμό του σταυρωτού πηλίκου παραπάνω δεν είναι μηδέν, τότε χρησιμοποιώντας ανομογενείς συντεταγμένες $z_i = x_i/y_i$ μπορούμε να γράψουμε το σταυρωτό πηλίκο ως εξής:

$$(z_1z_2; z_3z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Ακόμη και εάν κάποιο από τα y_i είναι μηδέν, μια έξυπνη χρήση του ∞ δίδει τα σωστά αποτελέσματα, για παράδειγμα εάν $y_1 = 0$, τότε

$$(\infty z_2; z_3z_4) = \frac{y_3(x_2y_4 - x_4y_2)}{y_4(x_2y_3 - x_3y_2)} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

Η χρήση του σταυρωτού πηλίκου επιβάλει την χρήση των σημείων με τη σωστή σειρά. Εάν αλλάξουμε την σειρά ισχύουν τα εξής:

$$\bullet(r_0r_1; r_2r_3) = (r_1r_0; r_3r_2) = (r_2r_3; r_0r_1)$$
$$\bullet(r_1r_0; r_2r_3) = (r_0r_1; r_2r_3)^{-1}$$
$$\bullet(r_0r_2; r_1r_3) = 1 - (r_0r_1; r_2r_3).$$

Παρατηρούμε ακόμη πως $(\infty 0; 1x) = x$ οπότε αφού υποθέσαμε ότι τα 4 σημεία είναι διαφορετικά $x \neq 0, 1$. Είχαμε δει όμως πως υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τρία τυχαία σημεία r_0, r_1, r_2 στα σημεία $\infty, 0, 1$ συνεπώς

$$(r_0r_1; r_2r_3) = (\tau(r_0)\tau(r_1); \tau(r_2)\tau(r_3)) = (\infty 0; 1\tau(r_3))$$

οπότε το σταυρωτό πηλίκο δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και 1. Εάν μελετήσουμε όλες τις πιθανές μεταθέσεις των 4 μεταβλητών βλέπουμε ότι το σταυρωτό πηλίκο μπορεί να πάρει τις εξής 6 συνολικά τιμές:

$$x, \frac{1}{x}, 1-x, \frac{1}{1-x}, 1-\frac{1}{x}, \frac{x}{x-1}.$$

Η *ομοπαραλληλική γεωμετρία* της ευθείας είναι η μελέτη των ποσοτήτων που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τη δράση της ομοπαραλληλικής ομάδας μετασχηματισμών της μορφής $x \mapsto x' = ax + b$. Δεν υπάρχει η έννοια της απόστασης μεταξύ δύο σημείων αλλά μπορούμε να πούμε για παράδειγμα ποιο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος x_2x_3 παραπάνω: είναι το σημείο x_1 για το οποίο ισχύει ότι $x_3 - x_1 = x_1 - x_2$, δηλαδή το σημείο για το οποίο ισχύει

$$(x_0\ x_1; x_2\ x_3) = -1$$

Στην προβολική ευθεία, η παραπάνω είναι μια ιδιαίτερη διάταξη σημείων που λέγονται σημεία *αρμονικά χωρισμένα*:

Ορισμός 2. Ένα σύνολο τεσσάρων σημείων της πραγματικής προβολικής ευθείας λέγεται *αρμονικό σύνολο* εάν το σταυρωτό τους πηλίκο είναι ίσο με -1.

Παρατηρήστε ότι η διάταξη αυτή αντιστοιχεί στην περίπτωση που οι 6 πιθανές τιμές που περιγράψαμε πιο πάνω ταυτίζονται κατά ζεύγη ($x = -1, 2$ ή $1/2$). Επίσης η συμμετρική ομάδα S_3 δρα στο σύνολο $\{0, 1, \infty\}$ και οι 6 πιθανές τιμές του σταυρωτού πηλίκου αποτελούν μια τροχιά αυτής της δράσης.

Η έννοια του αρμονικού συνόλου χαρακτηρίζει την πραγματική προβολική ευθεία όπως δείχνει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1. *Έστω $\tau : P(\mathbb{R}^2) \to P(\mathbb{R}^2)$ μια απεικόνιση 1-1 και επί (αμφεικόνιση) που απεικονίζει τα αρμονικά σύνολα σε επίσης αρμονικά σύνολα. Τότε η τ είναι προβολικός μετασχηματισμός.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τα σημεία x_0, x_1 και x_2 με αντιπροσωπευτικά διανύσματα $(0,1)$, $(1,0)$ και $(1,1)$ αντίστοιχα. Από το θεώρημα 4.2.1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός τ που αντιστοιχεί τα $x_i \mapsto \tau(x_i)$, με $i = 0, 1, 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο τ αφήνει αυτά τα σημεία αμετάβλητα οπότε τότε αρκεί να δείξουμε ότι $\tau = 1$ (η ταυτοτική απεικόνιση).

Χρησιμοποιούμε ανομογενείς συντεταγμένες, αφού $\tau(0,1) = (0,1)$, ο τ ορίζει μια αμφεικόνιση από το $\mathbb{R}$ στον εαυτό του με $\tau(0) = 0$ και $\tau(1) = 1$. Από τον ορισμό 13.5.2 του αρμονικού συνόλου παίρνουμε

$$(x_0\ x_1; x_2\ x_3) = -1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$$

Συνεπώς

$$(x_0\ \frac{1}{2}x; x\ 0) = -1$$

οπότε αφού ο τ απεικονίζει αρμονικά σύνολα σε επίσης αρμονικά σύνολα θα έχουμε

$$(x\ \tau(\frac{1}{2}x); \tau(x)\ 0) = -1$$

και συνεπώς

$$\tau(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\tau(x)$$

Ανάλογα θα έχουμε

$$(x_0\ \frac{1}{2}(x+y); x\ y) = -1$$

οπότε

$$(x_0\ \tau(\frac{1}{2}(x+y)); \tau(x)\ \tau(y)) = -1.$$

Συνεπώς $\tau(\frac{1}{2}(x+y)) = \frac{1}{2}(\tau(x) + \tau(y))$ οπότε από την παραπάνω σχέση θα πάρουμε

$$\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y).$$

Έπεται εύκολα ότι $\tau(x) = x\tau(1) = x1 = x$ για κάθε ρητό αριθμό x.

Θεωρούμε τώρα την ποσότητα

$$(x \ -x; 1 \ x^2) = \frac{(1-x)(x^2+x)}{(x^2-x)(1+x)} = -1$$

Αφού από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $\tau(-x) = -\tau(x)$ και ο τ διατηρεί τα αρμονικά σύνολα, τότε

$$(\tau(x) \ -\tau(x); 1 \ \tau(x^2)) = -1$$

οπότε $\tau(x^2) = \tau(x)^2$. Δηλαδή ο τ απεικονίζει θετικούς πραγματικούς αριθμούς σε θετικούς και αφού επίσης ισχύει ότι $\tau(x-y) = \tau(x)-\tau(y)$, τότε ο τ διατηρεί και τη διάταξη των πραγματικών αριθμών.

Τότε όμως υποθέτουμε ότι x κάποιος άρρητος αριθμός και $\tau(x) > x$. Υπάρχει ρητός q μεταξύ τους. Όμως τότε $q > x$ οπότε $q = \tau(q) > \tau(x)$ που είναι *άτοπο*, συνεπώς η τ είναι η ταυτοτική απεικόνιση για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. $\square$

Από τα παραπάνω καταλαβαίνει κανείς πως στους πραγματικούς αριθμούς, η έννοια του αρμονικού συνόλου είναι το μόνο που απαιτείται για να ορισθεί η ομάδα των προβολικών μετασχηματισμών και κατ' επέκταση, υιοθετώντας την προσέγγιση Klein, την προβολική γεωμετρία της πραγματικής προβολικής ευθείας.

Σημείωση 1: Είδαμε πως οι προβολικοί μετασχηματισμοί της ευθείας ουσιαστικά είναι οι ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί της μορφής $x \mapsto x' = ax + b$. Εύκολα καταλαβαίνει κανείς πως επειδή προφανώς $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, σε μεγαλύτερες διαστάσεις ισχύει το εξής: έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με $dimV = n$, οπότε $V \cong \mathbb{R}^n$. Τότε $dimP(V) = n-1$. Η ομάδα των προβολικών μετασχηματισμών $PGL_n(\mathbb{R})$ του προβολικού χώρου $P(V) = P(\mathbb{R}^n)$ διάστασης $(n-1)$ προκύπτει όπως είδαμε στην αρχή από το σύνολο (ομάδα) πηλίκο $GL_n(\mathbb{R})/\lambda I$. Μια δεύτερη περιγραφή λοιπόν της ομάδας των προβολικών μετασχηματισμών $PGL_n(\mathbb{R})$ του προβολικού χώρου διάστασης $(n-1)$ είναι πως αυτή αποτελείται από την ομάδα των ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών η οποία, γενικεύοντας αυτά που είδαμε στην περίπτωση της προβολικής ευθείας, αποτελείται από την ομάδα των γενικών γραμμικών μετασχηματισμών $GL_{n-1}(\mathbb{R})$ μαζί με τις μετατοπίσεις που είναι ένα επιπλέον αντίγραφο του $\mathbb{R}^{n-1}$.

13.6 Ομοπαραλληλική Γεωμετρία και η Ομοπαραλληλική Ομάδα A_n

Ένα βασικό κίνητρο του Klein στην έρευνά του ήταν η διαπίστωση ότι διαφορετικές (φαινομενικά) γεωμετρίες αποτελούν ουσιαστικά μερικές περιπτώσεις της προβολικής γεωμετρίας, η μόνη διαφορά ήταν η επιλογή της ομάδας μετασχηματισμών. Ας μελετήσουμε την ομοπαραλληλική γεωμετρία (affine geometry): θεωρούμε ένα υπερεπίπεδο $P(U)$ σε έναν προβολικό χώρο $P(V)$ και την υποομάδα των προβολικών μετασχηματισμών του $P(V)$ που απεικονίζει το $P(U)$ στον εαυτό του. Το συμπλήρωμα $P(V) - P(U)$ δέχεται την δράση αυτής της υποομάδας και λέγεται *ομοπαραλληλικός χώρος. Βασικά αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο χωρίς συγκεκριμένη αρχή* αλλά η ομάδα καθορίζει την φύση του.

Πιο συγκεκριμένα, επιλέγουμε μια βάση τέτοια ώστε σε ομογενείς συντεταγμένες $[x_0, x_1, ..., x_n]$ το υπερεπίπεδο $P(U)$ του $P(\mathbb{F}^{n+1})$ ορίζεται από τη σχέση $x_0 = 0$. Ένας προβολικός μετασχηματισμός τ που απεικονίζει το υπερεπίπεδο στον εαυτό του προέρχεται από κάποιον γραμμικό μετασχηματισμό που αναπαρίσταται με κάποιον $(n+1) \times (n+1)$ πίνακα του οποίου τα n στοιχεία της πρώτης γραμμής πλην του πρώτου αριστερά είναι ίσα με μηδέν. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε το πρώτο αριστερό μη μεδενικό στοιχείο της πρώτης γραμμής να είναι ένα, δηλαδή $T_{00} = 1$. Η δράση της υποομάδας του $GL_{n+1}(\mathbb{F})$ που ορίζεται από τους πίνακες της παραπάνω μορφής πάνω στον ομοπαραλληλικό χώρο $P(\mathbb{F}^{n+1}) - P(\mathbb{F}^n) \simeq \mathbb{F}^n$ δίδεται από την γνωστή σχέση

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto [1, x_1, ..., x_n]$$

είναι ακριβώς της μορφής που περιγράψαμε

$$x \mapsto Ax + b$$

όπου $A \in GL_n(\mathbb{F})$ και $b \in \mathbb{F}^n$. Η ομάδα αυτή λέγεται *ομοπαραλληλική ομάδα* $A_n(\mathbb{F})$.

Το απλούστερο παράδειγμα είναι η ομοπαραλληλική ευθεία $\mathbb{R}$ με την ομάδα μετασχηματισμών

$$x \mapsto ax + b$$

με $a \neq 0$. Το σταυρωτό πηλίκο, που αποτελεί προβολικό αναλλοίωτο τεσσάρων σημείων της $P(\mathbb{R}^2)$ δίδει ένα ομοπαραλληλικό αναλλοίωτο τριών σημείων αφού η $A_1(\mathbb{R})$ είναι η υποομάδα της $PGL_2(\mathbb{R})$ που διατηρεί το σημείο $\infty \in P(\mathbb{R}^2)$. Έχουμε

$$(\infty x_1; x_2 x_3) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2}$$

οπότε εάν $x_1 < x_2 < x_3$ η αναλογία στην οποία το x_2 διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα $[x_1, x_3]$ αποτελεί το ομοπαραλληλικό αναλλοίωτο $(x_1\infty; x_2x_3)$. Η ειδική τιμή $1/2$ (αρμονικότητα), αντιστοιχεί στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος, συνεπώς αν και δεν υπάρχει η έννοια της απόστασης, διατηρείται η έννοια της αναλογίας.

Σε μεγαλύτερες διαστάσεις, το κέντρο μάζας m μιας διακριτής κατανομής $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}(x_1 + ... + x_m)$$

αποτελεί μια ομοπαραλληλική αναλλοίωτη ποσότητα επειδή

$$\frac{1}{m}(Ax_1 + b + ... + Ax_m + b) = A\bar{x} + b.$$

14 Οπτική και Ειδική Θεωρία Σχετικότητας

Θα μελετήσουμε ως εφαρμογές δύο γεωμετρίες που ορίζονται από δύο συγκεκριμένες ομάδες μετασχηματισμών που έχουν μεγάλη πρακτική σημασία.

14.1 Οπτική Gauss

Η πρώτη είναι η γραμμική ανάλυση οπτικών συστημάτων με έναν άξονα συμμετρίας που λέγεται *οπτική Gauss*. Οι πιο γνωστές διατάξεις όπως τα τηλεσκόπια, τα μικροσκόπια, πράγματι έχουν έναν άξονα συμμετρίας. Αν θεωρήσουμε πως ο άξονας συμμετρίας είναι ο άξονας $x'x$ στο φυσικό χώρο $\mathbb{R}^3$ (εφοδιασμένος με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων), τότε το οπτικό σύστημα απεικονίζει ακτίνες φωτός του επιπέδου xy σε ακτίνες φωτός στο ίδιο επίπεδο.

Θεωρούμε το επίπεδο xy εμφυτευμένο μέσα στο προβολικό επίπεδο $P(\mathbb{R}^3)$ με ομογενείς συντεταγμένες (x_0, x_1, x_2) έτσι ώστε $x = x_1/x_0$ και $y = x_2/x_0$ να είναι οι ανομογενείς συντεταγμένες.

Ορισμός 1. Το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ με $det(T) = +1$ αποτελεί ομάδα που συμβολίζεται $SL_n(\mathbb{F})$ και λέγεται *ειδική γραμμική ομάδα (special linear group)*.

Η οπτική του Gauss είναι η μελέτη των αναλλοίωτων ποσοτήτων κάτω από τη δράση της ομάδας $SL_2(\mathbb{R})$ στο πραγματικό προβολικό επίπεδο $P(\mathbb{R}^3)$ που δίδεται από τη σχέση

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (ax_0 + bx_1, cx_0 + dx_1, x_2)$$

Το στοιχείο της ομάδας $SL_2(\mathbb{R})$ είναι ο πίνακας

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

όπου $det(T) = ad - bc = 1$. Η ομάδα $SL_2(\mathbb{R})$ είναι υποομάδα της ομάδας $PGL_3(\mathbb{R})$ (ομάδα των προβολικών μετασχηματισμών του προβολικού επιπέδου $P(\mathbb{R}^3)$). Τα στοιχεία (πίνακες) της ομάδας $SL_2(\mathbb{R})$ μετατίθενται με τις ανακλάσεις στον $x'x$ άξονα, κάτι που είναι απαραίτητο για να αναπαριστούν συστήματα (οπτικές διατάξεις) για τα οποία ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας μιας και περιστροφή κατά γωνία π (σε ακτίνια) γύρω από αυτόν τον άξονα δίδει την ανάκλαση στο επίπεδο xy. *Η φυσική εμπεριέχεται στην απαίτηση η ορίζουσα*

των πινάκων να είναι ίση με $+1$.

Η ομάδα $SL_2(\mathbb{R})$ δρα στα σημεία του προβολικού επιπέδου $P(\mathbb{R}^3)$ καθώς και στο δυϊκό επίπεδο των ευθειών. Ένα οπτικό σύστημα (οπτική διάταξη) αντιστοιχεί σε έναν πίνακα $T \in SL_2(\mathbb{R})$. Η δράση του στις ευθείες αντιστοιχεί με ένα μετασχηματισμό ακτίνων φωτός σε ακτίνες φωτός. Η δράση του στα σημεία του επιπέδου είναι να παράγει το είδωλο ενός σημείου.

Θεωρούμε την επίδραση της οπτικής διάταξης σε ακτίνες φωτός παράλληλες στον άξονα $x'x$. Αυτές τέμνονται στο προβολικό επίπεδο στο σημείο $(0, 1, 0)$. Η εικόνα τους κάτω από τη δράση του T συνίσταται από τις ακτίνες που διέρχονται από το σημείο $T(0, 1, 0) = (b, d, 0)$ ή με χρήση ανομογενών συντεταγμένων $x = d/b$ και $y = 0$. Η απόσταση $x = d/b$ είναι η *εστιακή απόσταση* της οπτικής διάταξης.

Η x-συντεταγμένη ενός σημείου, υπό την επίδραση του T, μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$x \mapsto \frac{dx + c}{bx + a}$$

που είναι ένας προβολικός μετασχηματισμός. Συνεπώς, από την Πρόταση 13.5.1, το σταυρωτό πηλίκο τεσσάρων σημείων στον άξονα $x'x$ είναι το ίδιο με αυτό των εικόνων τους κάτω από την επίδραση της οπτικής διάταξης.

Ως εφαρμογή του παραπάνω, θεωρούμε ένα λεπτό συμμετρικό φακό που βρίσκεται στην αρχή O του συστήματος συντεταγμένων με εστιακό μήκος f. Από τον ορισμό του εστιακού μήκους, το στοιχείο $T \in SL_2(\mathbb{R})$ που περιγράφει την οπτική διάταξη έχει την ιδιότητα $T(\infty) = f$. Από τη συμμετρία της διάταξης, προκύπτει ότι $T^{-1}(\infty) = -f$ και επιπλέον $T(0) = 0$. Εάν το είδωλο ενός σημείου που βρίσκεται σε απόσταση u αριστερά του φακού βρίσκεται σε κάποιο σημείο σε απόσταση v στα δεξιά του φακού, τότε $T(u) = v$. Τώρα από την αναλλοιότητα του σταυρωτού πηλίκου κάτω από προβολικούς μετασχηματισμούς, προκύπτει ότι

$$(\infty \ -f; 0 \ -u) = (T(\infty) \ T(-f); T(0) \ T(-u)) = (f \ \infty; 0 \ v)$$

Συνεπώς από τον ορισμό 13.5.1 του σταυρωτού πηλίκου προκύπτει ότι

$$\frac{-u + f}{f} = \frac{0 - f}{v - f},$$

δηλαδή

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f},$$

που δεν είναι άλλη από τη γνωστή σχέση της οπτικής.

Κάπως διαφορετικά, εάν θεωρήσουμε ότι η αξονική συμμετρία επισυμβαίνει γύρω από τον άξονα $x'x$, τότε τα φαινόμενα θα πρέπει να εμφανίζουν συμμετρία ως προς ανακλάσεις στον άξονα $x'x$

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

Το μοντέλο της οπτικής θα πρέπει να προέρχεται από την απεικόνιση του $\mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^3)$:

$$(x, y) \mapsto [1, x, y]$$

και αρχικά θεωρούμε την υποομάδα των προβολικών μετασχηματισμών που μετατίθενται με τια ανακλάσεις στον άξονα $x'x$

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, x_1, -x_2).$$

Αυτή αποτελείται από τους γραμμικούς μετασχηματισμούς T των οποίων η αναπαράσταση γίνεται μέσω πινάκων της μορφής

$$T = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Επιλέγουμε $T_{22} = 1$ αλλά τώρα χρειαζόμαστε και τη βοήθεια της φυσικής, που λέγει ότι ο 2×2 άνω αριστερά υποπίνακας T_{ij} πρέπει να έχει ορίζουσα ίση με τη μονάδα, (κάτι που προέρχεται από τη *συμπλεκτική γεωμετρία*). Συνεπώς η οπτική Gauss μπορεί να αποκτήσει γεωμετρικό φορμαλισμό χρησιμοποιώντας την δράση της ομάδας $SL_2(\mathbb{R})$. Ένας πίνακας

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

της ομάδας αυτής δρα ως εξής:

$$(x, y) \mapsto (\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{1}{cx + d}),$$

δηλαδή ο άξονας συμμετρίας χρησιμοποιείται ως προβολική ευθεία και η ομάδα δρα ως προβολικοί μετασχηματισμοί. Αυτό είναι αναγκαίο καθώς το είδωλο ενός σημείου του άξονα μέσω της παρεμβολής ενός φακού μπορεί να είναι στο άπειρο, (τότε το σημείο λέγεται *εστιακό σημείο*). Από την σκοπιά της προβολικής γεωμετρίας όλες εκείνες οι παράλληλες ακτίνες φωτός από το άπειρο είναι οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο τομής του άξονα $x'x$ με την επ΄ άπειρον

ευθεία, το σημείο $[0,1,0]$, και ο προβολικός μετασχηματισμός τις μετασχηματίζει στις ευθείες που διέρχοναται από το εστιακό σημείο.

Ας μελετήσουμε λοιπόν το αποτέλεσμα που θα έχει ένας λεπτός συμμετρικός φακός στην αρχή των συντεταγμένων σε αντικείμενα επί του οπτικού άξονα: Δίδεται από ένα στοιχείο $T \in SL_2(\mathbb{R})$ που δρα στον άξονα $x'x$ ως προβολικός μετασχηματισμός τ. Εάν το εστιακό σημείο είναι το $(x,y) = (-f,0)$, τότε

$$\tau(\infty) = -f.$$

Επειδή ο φακός είναι συμμετρικός

$$\tau^{-1}(\infty) = f.$$

Οι ακτίνες φωτός στην αρχή των συντεταγμένων διαδίδονται ευθύγραμμα οπότε

$$\tau(0) = 0.$$

Ο προβολικός μετασχηματισμός της ευθείας καθορίζεται μονοσήμαντα από την δράση του σε τρία σημεία και εύκολα βρίσκουμε πως

$$\tau(x) = \frac{-fx}{x-f}.$$

Ένα αντικείμενο στο σημείο $x = O$ συνεπώς έχει είδωλο στο $x = i$ όπου

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{O}.$$

Η ομάδα των προβολικών μετασχηματισμών $PGL_2(\mathbb{R})$ της προβολικής ευθείας αποκτάται από το πηλίκο της γενικής γραμμικής ομάδας $GL_2(\mathbb{R})$ από τους βαθμωτούς πίνακες. Στην ομάδα $SL_2(\mathbb{R})$ αυτά τα βαθμωτά είναι μόνο οι αριθμοί ± 1, συνεπώς αρκεί να επιλέξουμε το πρόσημο για να προσδιορίσουμε τον πίνακα T:

$$T = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}.$$

14.2 Ειδική Θεωρία Σχετικότητας

Στην Ειδική Θεωρία Σχετικότητας (A. Einstein 1905), θεωρούμε τον (επίπεδο) χωρόχρονο τεσσάρων διαστάσεων ως το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ με συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3, t), εφοδιασμένο με την εξής τετραγωνική μορφή

$$Q(v) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2$$

που είναι γνωστή στη φυσική ως *μετρική Minkowski* (η σταθερά c είναι η ταχύτητα του φωτός, που αποτελεί πειραματικό δεδομένο).

Ορισμός 1. Η ομάδα των *(ανομογενών) μετασχηματισμών Lorentz* είναι η ομάδα των μετασχηματισμών $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ της μορφής $v \mapsto Av + u$, όπου $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που διατηρεί αναλλοίωτη τη μετρική Minkowski, δηλαδή ισχύει ότι $Q(Av) = Q(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^4$ και για κάποιο $u \in \mathbb{R}^4$.

Από γεωμετρικής σκοπιάς, η ειδική θεωρία σχετικότητας είναι η μελέτη των αναλλοίωτων ποσοτήτων κάτω από τη δράση της ομάδας Lorentz.

Μια αναλλοίωτη ποσότητα είναι αρκετά προφανής. Εάν $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$, τότε $Q(v_1 - v_2) = Q[A(v_1 - v_2)] = Q[(Av_1 + u) - (Av_2 + u)]$, συνεπώς η ποσότητα $Q(v_1 - v_2)$ αποτελεί μια αναλλοίωτη ποσότητα ενός ζεύγους διαφορετικών σημείων του $\mathbb{R}^4$.

Εάν εξειδικεύσουμε τη μελέτη μας στην υποομάδα της ομάδας Lorentz που διατηρεί αναλλοίωτο το επίπεδο $x_2 = x_3 = 0$, παίρνουμε τους μετασχηματισμούς

$$(x, t) \mapsto (x + \beta t + b_1, \gamma x + \delta t + b_2)$$

και

$$(ax + \beta t)^2 - c^2(\gamma x + \delta t)^2 = x^2 - c^2 t^2$$

που σημαίνει πως

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & c \sinh u \\ c^{-1} \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$$

Συνεπώς ένας μετασχηματισμός Lorentz έχει τη μορφή

$$x \mapsto x' = (\cosh u)x + c(\sinh u)t + b_1$$

και

$$t \mapsto t' = c^{-1}(\sinh u)x + (\cosh u)t + b_2$$

όπου $\sinh u$ και $\cosh u$ οι γνωστές υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Εάν μιλήσουμε με φυσικούς όρους, οι μετασχηματισμοί Lorentz συσχετίζουν τις απόψεις του κόσμου (μετρήσεις φυσικών μεγεθών) δύο παρατηρητών (αδρανειακών που κινούνται με σταθερή ταχύτητα ο ένας ως προς τον άλλο),

κατ' αναλογία με τους προβολικούς μετασχηματισμούς του επιπέδου που συσχετίζουν δύο διαφορετικές κατόψεις του ιδίου αντικειμένου.

Εάν ο παρατηρητής με συντεταγμένες (x, t) βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων $x = 0$ $\forall t$, τότε ο παρατηρητής με συντεταγμένες (x', t') παρατηρεί

$$x' = c(\sinh u)t + b_1$$

και

$$t' = (\cosh u)t + b_2$$

δηλαδή παρατηρεί ένα αντικείμενο που κινείται με ομαλή ταχύτητα

$$\frac{dx'}{dt'} = c \tanh u = v,$$

πράγμα που προσδίδει στους παραπάνω μετασχηματισμούς την γνωστή από τη φυσική μορφή

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x + vt) + b_1$$

και

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(\frac{vx}{c^2} + t) + b_2$$

Εάν $x = ct$, τότε $x' = ct+$σταθ, οπότε αντικείμενα που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός c σε κάποιο σύστημα αναφοράς, θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα και σε κάθε άλλο σύστημα αναφοράς. Για τις άλλες ταχύτητες όμως υπάρχει μια αναλογική διαφοροποίηση. Δεν είναι το κατάλληλο μέρος για να μπούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες για την ειδική θεωρία σχετικότητας. Επαναλαμβάνουμε με έμφαση το γεωμετρικό γεγονός πως τα βασικά στοιχεία της ειδικής θεωρίας σχετικότητας προκύπτουν άμεσα από την αναλλοιότητα κάτω από την ομάδα Lorentz που αποτελεί την ομάδα συμμετρίας της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Η σχέση της ομάδας Lorentz με τους προβολικούς μετασχηματισμούς (του μιγαδικού επιπέδου) θα αποτελέσει το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

15 Υποομάδες της Προβολικής Ομάδας του Μιγαδικού Επιπέδου $PGL_2(\mathbb{C})$

Η ομάδα $PGL_2(\mathbb{C})$ δρα στη μιγαδική προβολική ευθεία $P(\mathbb{C}^2)$. Ο χώρος αυτός προκύπτει με την προσθήκη ενός *επ΄ άπειρον σημείου* στους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$ και χρησιμοποιείται συχνά και στη μιγαδική ανάλυση. Τοπολογικά είναι μια σφαίρα με πραγματική διάσταση 2 (και μιγαδική διάσταση 1) S^2 όπως είδαμε στο παράδειγμα 3.6.5, κάτι που φαίνεται και από την παρακάτω αμφεικόνιση

$$(z_0, z_1) \mapsto (\frac{z_0\overline{z}_0 - z_1\overline{z}_1}{z_0\overline{z}_0 + z_1\overline{z}_1}, \frac{z_1\overline{z}_0 + z_0\overline{z}_1}{z_0\overline{z}_0 + z_1\overline{z}_1}, i\frac{z_1\overline{z}_0 - z_0\overline{z}_1}{z_0\overline{z}_0 + z_1\overline{z}_1})$$

Η παραπάνω αμφεικόνιση απεικονίζει ένα σημείο της μιγαδικής προβολικής ευθείας $P(\mathbb{C}^2)$ με ομογενείς συντεταγμένες (z_0, z_1) σε ένα διάνυσμα $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Θεωρούμε την υποομάδα της ομάδας $GL_2(\mathbb{C})$ που αποτελείται από τα στοιχεία (αντιστρέψιμοι 2×2 μιγαδικοί πίνακες) που μετατίθενται με την πράξη $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\textbf{(i)} S(z_0, z_1) = (0, \overline{z}_0), S^2 = 0$$

$$\textbf{(ii)} S(z_0, z_1) = (\overline{z}_1, -\overline{z}_0), S^2 = -1$$

$$\textbf{(iii)} S(z_0, z_1) = (\overline{z}_0, \overline{z}_1), S^2 = +1$$

Αυτές οι πράξεις δεν αποτελούν γραμμικούς μετασχηματισμούς στο σώμα των μιγαδικών αριθμών αλλά παρ΄ όλα αυτά, τουλάχιστον στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, δίδουν μια καλά ορισμένη απεικόνιση από τη μιγαδική προβολική ευθεία στον εαυτό της, μιας και $S(\lambda z_0, \lambda z_1) = \overline{\lambda} S(z_0, z_1)$, οπότε η S απεικονίζει ένα μονοδιάστατο μιγαδικό διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{C}^2$ στον εαυτό του. Συμβολίζουμε αυτή την απεικόνιση με $\sigma : P(\mathbb{C}^2) \to P(\mathbb{C}^2)$.

Εάν $T \in GL_2(\mathbb{C})$ ορίζεται από τον πίνακα

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

με $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ και $ad - bc \neq 0$, και εάν η S είναι αυτή της περίπτωσης (i), τότε

$$ST(z_0, z_1) = (0, \overline{a}\overline{z}_0 + \overline{b}\overline{z}_1)$$

και

$$TS(z_0, z_1) = (b\overline{z}_0, d\overline{z}_0),$$

τότε παρατηρούμε ότι $TS = ST \Leftrightarrow b = 0$ και $d = \overline{a}$. Το επ' άπειρον σημείο $(0, 1)$ παραμένει καθορισμένο από όλα τα T σαν το παραπάνω, συνεπώς η παραπάνω ομάδα μετασχηματισμών δρα στο $\mathbb{C}$ με ανομογενή συντεταγμένη $z = z_1/z_2$. Είναι ο μετασχηματισμός

$$z \mapsto \overline{a}^{-1}(az + b) = e^{i\theta}z + k$$

Αφού

$$|Tz_1 - Tz_2| = |e^{i\theta}z_1 + k - e^{i\theta}z_2 - k| = |z_1 - z_2|,$$

ο παραπάνω αποτελεί μετασχηματισμό που διατηρεί τη γνωστή απόσταση της Ευκλείδειας γεωμετρίας και άρα διατηρεί τη γνωστή επίπεδη Ευκλείδεια γεωμετρία. Η ομάδα αυτή όμως δεν συμπεριλαμβάνει και τις ανακλάσεις που επίσης διατηρούν τις αποστάσεις. Η πλήρης Ευκλείδεια ομάδα σε τυχαίες διαστάσεις δίδεται στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1. Η ομάδα των *Ευκλείδειων μετασχηματισμών* στις n-διαστάσεις είναι η ομάδα των μετασχηματισμών $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ της μορφής $v \mapsto Av + u$, όπου $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που διατηρεί αναλλοίωτη την Ευκλείδεια μετρική, δηλαδή ισχύει ότι $Q(Av) = Q(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ και για κάποιο $u \in \mathbb{R}^n$. Υπενθυμίζουμε πως η Ευκλείδεια μετρική δίδεται από την τετραγωνική μορφή

$$Q(v) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2.$$

Η ομάδα των μετασχηματισμών που περιγράψαμε πιο πάνω αποτελείται από την υποομάδα της Ευκλείδειας ομάδας του $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ που διατηρεί τον *προσανατολισμό*.

Θεωρούμε τώρα την S της περίπτωσης (ii). Από τον ορισμό της αμφεικόνισης που ταυτίζει τη μιγαδική προβολική ευθεία με τη 2-διάστατη σφαίρα, προκύπτει πως η δράση της S στη μιγαδική προβολική ευθεία αντιστοιχεί κάθε σημείο της 2-διάστατης σφαίρας στο αντιδιαμετρικό του σημείο. Στην περίπτωση αυτή

$$ST(z_0, z_1) = (\overline{c}\overline{z}_0 + \overline{d}\overline{z}_1, -\overline{a}\overline{z}_0 - \overline{b}\overline{z}_1)$$

και

$$TS(z_0, z_1) = (a\overline{z}_1 - b\overline{z}_0, c\overline{z}_1 - d\overline{z}_0).$$

Συνεπώς $TS = ST \Leftrightarrow b = -\overline{c}$ και $a = \overline{d}$.

Η ομάδα των μετασχηματισμών της μιγαδικής προβολικής ευθείας (σφαίρα 2-διαστάσεων) που ορίζεται από αυτή την S της περίπτωσης (ii), μετατίθεται με την αντιδιαμετρική απεικόνιση (αυτήν που αντιστοιχεί κάθε σημείο στο αντιδιαμετρικό του). Συνεπώς αν τ είναι ένας προβολικός μετασχηματισμός που ανήκει στην εν λόγω ομάδα, τότε θα ισχύει ότι $\tau\sigma = \sigma\tau$.

Έστω $x, y \in P(\mathbb{C}^2)$ δύο διαφορετικά σημεία τέτοια ώστε $y \neq \sigma(x)$. Τότε αποκτάμε τέσσερα διαφορετικά σημεία $x, y, \sigma(x), \sigma(y)$, συνεπώς μπορούμε να σχηματίσουμε το σταυρωτό πηλίκο $(x\ y; \sigma(y),\ \sigma(x))$. Αφού το σταυρωτό πηλίκο είναι αναλλοίωτο κάτω από τους προβολικούς μετασχηματισμούς,

$$(x\,y; \sigma(y)\,\sigma(x)) = (\tau(x)\,\tau(y); \tau(\sigma(y))\,\tau(\sigma(x))) = (\tau(x)\,\tau(y); \sigma(\tau(y))\,\sigma(\tau(x))).$$

Συνεπώς αυτή η συνάρτηση των ζευγών σημείων είναι αναλλοίωτη κάτω από την ομάδα των προβολικών μετασχηματισμών που μετατίθενται με την σ. Μπορούμε λοιπόν να τη χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε μια *απόσταση* (μετρική) μεταξύ των σημείων που είναι αναλλοίωτα κάτω από τη δράση της ομάδας. Η μετρική αυτή είναι αρκετά γνωστή όπως θα δούμε. Θέτουμε $x = (z_0, z_1)$ και $y = (w_0, w_1)$, χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες, οπότε από τον ορισμό 13.5.1 του σταυρωτού πηλίκου έχουμε

$$(x\ y; \sigma(x)\ \sigma(y)) = \frac{(z_0\overline{w}_0 + z_1\overline{w}_1)(w_0\overline{z}_0 + w_1\overline{z}_0)}{(z_0\overline{z}_0 + z_1\overline{z}_1)(w_0\overline{w}_0 + w_1\overline{w}_1)}$$

Από την άλλη μεριά όμως αν $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ είναι δύο μοναδιαία διανύσματα που αντιστοιχούν στα σημεία x και y μέσω της αμφεικόνισης μεταξύ της δισδιάστατης σφαίρας και της μιγαδικής προβολικής ευθείας, τότε το εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο δίδεται από την εξής σχέση:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} :=$$

$$\frac{(z_0\overline{z}_0 - z_1\overline{z}_1)(w_0\overline{w}_0 - w_1\overline{w}_1) + (z_1\overline{z}_0 + z_0\overline{z}_1)(w_1\overline{w}_0 + w_0\overline{w}_1)}{(z_0\overline{z}_0 + z_1\overline{z}_1)(w_0\overline{w}_0 + w_1\overline{w}_1)} -$$

$$-\frac{(z_1\overline{z}_0 - z_0\overline{z}_1)(w_1\overline{w}_0 - w_0\overline{w}_1)}{(z_0\overline{z}_0 + z_1\overline{z}_1)(w_0\overline{w}_0 + w_1\overline{w}_1)} =$$

$$= \frac{z_0\overline{w}_0 + z_1\overline{w}_1)(w_0\overline{z}_0 + w_1\overline{z}_0)}{(z_0\overline{z}_0 + z_1\overline{z}_1)(w_0\overline{w}_0 + w_1\overline{w}_1)}.$$

Συνεπώς $(x\ y; \sigma(y)\ \sigma(x)) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{x}$ και $\overrightarrow{y}$. Οπότε αν ορίσουμε την απόσταση (μετρική) ως

$$d(x, y) := \cos^{-1}(x\ y; \sigma(y)\ \sigma(x)),$$

αυτός ο ορισμός δίδει τη συντομότερη απόσταση κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου που συνδέει δύο σημεία πάνω στη σφαίρα (μιγαδική προβολική ευθεία).

Θεωρούμε τώρα την τελευταία περίπτωση (iii) της S. Τώρα η S δίδει απλά το μιγαδικό συζυγές ενός σημείου οπότε η υποομάδα της $GL_2(\mathbb{C})$ που μετατίθεται με την S είναι η ομάδα $GL_2(\mathbb{R})$ οπότε δίδει την υποομάδα $PGL_2(\mathbb{R}) \subset PGL_2(\mathbb{C})$.

Εάν το (z_0, z_1) είναι πραγματικό, τότε κάτω από την αμφεικόνιση μεταξύ της δισδιάστατης σφαίρας και της μιγαδικής προβολικής ευθείας, η πραγματική προβολική ευθεία μέσα στη μιγαδική προβολική ευθεία απεικονίζεται στο μέγιστο κύκλο $x_3 = 0$. Έχουμε ήδη δει τη γεωμετρία της πραγματικής προβολικής ευθείας κάτω από τη δράση της ομάδας $PGL_2(\mathbb{R})$. Όμως αυτός ο (μέγιστος) κύκλος τέμνει τη σφαίρα σε δύο ημισφαίρια και η ομάδα δρα σε καθένα από αυτά.

Θεωρούμε τη δράση της $PGL_2(\mathbb{R})$ στο ημισφαίριο, έστω H, που ορίζεται από τη σχέση $x_3 < 0$. Αφού το σημείο $(0, 1) \in P(\mathbb{C}^2)$ δεν βρίσκεται σε αυτό το ημισφαίριο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανομογενή συντεταγμένη $z = z_1/z_0$ η οποία απεικονίζει το H στο *άνω ημιεπίπεδο Argand*, δηλαδή στους μιγαδικούς αριθμούς με θετικό φανταστικό μέρος.

Το σημείο $\sigma(x)$ είναι τώρα το μιγαδικό συζυγές του σημείου x και βρίσκεται στο κάτω ημιεπίπεδο Argand. Συνεπώς, δοθέντων δύο σημείων $z, w \in H$, μπορούμε να σχηματίζουμε ένα αναλλοίωτο σταυρωτό πηλίκο

$$(\overline{z}\ w; \overline{w}\ z) = \frac{|z - w|^2}{4\Im(z)\Im(w)}$$

οπότε μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση (μετρική)

$$d(z, w) := \sinh^{-1} \sqrt{(\overline{z}\ w; \overline{w}\ z)}$$

Η γεωμετρία που ορίζεται από τη δράση της ομάδας $PGL_2(\mathbb{R})$ στο άνω ημιεπίπεδο Argand, λέγεται *υπερβολική γεωμετρία*. Αυτή εμφανίζεται στην Ειδική Θεωρία Σχετικότητας.

16 Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία

Η ομάδα $SL_2(\mathbb{R})$ δρα και σε άλλους χώρους πλην της προβολικής ευθείας $P(\mathbb{R}^2)$. Η μελέτη αναλλοίωτων ποσοτήτων υπό τη δράση αυτής της ομάδας μας οδηγεί σε μια γεωμετρία που σε κάποια χαρακτηριστικά της μοιάζει με την Ευκλείδεια Γεωμετρία αλλά κάποια άλλα χαρακτηριστικά της είναι δραστικά διαφορετικά. Η γεωμετρία αυτή όταν πρωτοανακαλύφθηκε ονομάστηκε *Μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία*, στις μέρες μας είναι γνωστή ως *υπερβολική γεωμετρία*.

Ένας πραγματικός πίνακας γενικά αποτελεί ειδική περίπτωση ενός μιγαδικού πίνακα, συνεπώς η ομάδα $PGL_2(\mathbb{R})$ αποτελεί υποομάδα της $PGL_2(\mathbb{C})$, οπότε δρα στην μιγαδική προβολική ευθεία $P(\mathbb{C}^2)$. Διατηρεί το αντίγραφο της $P(\mathbb{R}^2) \subset P(\mathbb{C}^2)$ που αποτελείται από τα σημεία με πραγματικές ομογενείς συντεταγμένες $[x_0, x_1]$ αλλά θα θέλαμε να θεωρήσουμε το συμπλήρωμα αυτού του υποσυνόλου. Αφού το $\infty = [1, 0]$ είναι πραγματικό, τότε

$$P(\mathbb{C}^2) - P(\mathbb{R}^2) \subset P(\mathbb{C}^2) - \{\infty\}$$

που είναι ίσο με το $\mathbb{C} - \mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα, το άνω και το κάτω. Ένα στοιχείο της $PGL_2(\mathbb{R})$ μπορεί να εναλλάσσει αυτά τα δύο (για παράδειγμα $z \mapsto -z$) αλλά η υποομάδα $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ τα διατηρεί. Επιλέγουμε το άνω ημιεπίπεδο και το συμβολίζουμε με H. Στην πραγματικότητα η ομάδα δρα μεταβατικά στο H διότι ο μετασχηματισμός

$$z \mapsto az + b$$

απεικονίζει το i στο $ai + b$ και εάν $a > 0$, ο μετασχηματισμός ορίζεται μέσω του 2×2 πίνακα

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει ορίζουσα 1.

Μπορούμε να ορίσουμε μια αναλλοίωτη συνάρτηση για ένα ζεύγος διακριτών σημείων του H χρησιμοποιώντας το σταυρωτό πηλίκο

$$(zw; \bar{w}\bar{z}).$$

Αφού τα z και w ευρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο, τα $\bar{z}$ και $\bar{w}$ ευρίσκονται στο κάτω ημιεπίπεδο οπότε εάν $z \neq w$, τα τέσσερα σημεία $z, w, \bar{z}, \bar{w}$ είναι διαφορετικά και το σταυρωτό πηλίκο είναι καλά ορισμένο. Αναλυτικά

$$(zw; \bar{w}\bar{z}) = \frac{(z - \bar{w})(w - \bar{z})}{(z - \bar{z})(w - \bar{w})} = \frac{|z - \bar{w}|^2}{4\Im z \Im w}$$

που είναι θετικό και συμμετρικό διότι τα $\Im z$ και $\Im w$ είναι θετικά. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θα ορίσουμε μια έννοια *απόστασης* μεταξύ των z και w. Σημειώνουμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θέσουμε $z = w$ στο σταυρωτό πηλίκο $(zw; \bar{w}\bar{z})$ διότι

$$(zz; \bar{z}\bar{z}) = \frac{|z - \bar{z}|^2}{4\Im z \Im z} = 1.$$

Ορισμός 1. Έστω z, w δύο σημεία στο άνω ημιεπίπεδο. Η *υπερβολική απόσταση* μεταξύ των z, w είναι η ποσότητα

$$d(z, w) = 2 \sinh^{-1} \sqrt{(zw; \bar{w}\bar{z})}.$$

Η ποσότητα αυτή είναι φανερά αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της ομάδας $PSL_2(\mathbb{R})$. Η αναλυτική έκφραση δείχνει ότι εάν $z = ix, w = iy$ είναι δυο φανταστικά σημεία στο H με $x > y$, τότε

$$e^{d/2} - e^{d/2} = 2\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4xy}} = (x/y)^{1/2} - (y/x)^{1/2}$$

οπότε

$$d(ix, iy) = \ln x - \ln y.$$

Αυτή η έννοια της απόστασης έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Πρόταση 1. Έστω z_1, z_2 και w_1, w_2 δύο ζεύγη διαφορετικών σημείων στο άνω ημιεπίπεδο και υποθέτουμε πως $d(z_1, z_2) = d(w_1, w_2)$. Τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\tau \in PSL_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $\tau(z_i) = w_i$ για $i = 1, 2$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα σημεία $z_1, z_2, \bar{z_2}$ τα οποία είναι διαφορετικά διότι $z_1 \neq z_2$ και το $\bar{z_2}$ βρίσκεται στο κάτω ημιεπίπεδο. Άρα υπάρχει μοναδικός μιγαδικός προβολικός μετασχηματισμός τ τέτοιος ώστε

$$\tau(z_1) = w_1, \tau(z_2) = w_2, \tau(\bar{z_2}) = \bar{w_2}.$$

Από την προβολική αναλλοιότητα

$$(z_1 z_2; \bar{z_2}\bar{z_1}) = (\tau(z_1)\tau(z_2); \tau(\bar{z_2})\tau(\bar{z_1})) = (w_1 w_2; \bar{w_2}\tau(\bar{z_1})).$$

Όμως $d(z_1, z_2) = d(w_1, w_2)$ οπότε

$$(w_1 w_2; \bar{w_2}\tau(\bar{z_1})) = (z_1 z_2; \bar{z_2}\bar{z_1}) = (w_1 w_2; \bar{w_2}\bar{w_1})$$

οπότε $\tau(\bar{z_1}) = \bar{w_1}$. Έχουμε συνεπώς

$$\tau(\bar{z_1}) = \tau(\bar{z_1}), \tau(\bar{z_2}) = \tau(\bar{z_2}),$$

δηλαδή οι δύο λύσεις στο κάτω ημιεππίπεδο της εξίσωσης

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}}$$

που είναι δευτέρου βαθμού με φανταστικούς συντελεστές

$$(a\bar{c}-\bar{a}c)z^2 + (b\bar{c}-\bar{b}c+a\bar{d}-\bar{a}d)z + (b\bar{d}-\bar{b}d) = 0$$

και η οποία είτε μηδενίζεται είτε έχει συζυγείς λύσεις. Όμως αφού το φανταστικό μέρος και των δύο ριζών είναι αρνητικό, θα πρέπει να μηδενίζεται, οπότε η εξίσωση ικανοποιείται ταυτοτικά, πράγμα που σημαίνει πως

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

και $|\lambda| = 1$, οπότε $\lambda = e^{i\theta}$. Έπεται λοιπόν ότι ο

$$e^{-i\theta} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

είναι πραγματικός και με θετική ορίζουσα αφού απεικονίζει το z_1 του άνω ημιεπιππέδου στο w_1 που επίσης βρίσκεται στο άνω ημιεπίππεδο, άρα με μια συστολή παίρνουμε ένα στοιχείο της $SL_2(\mathbb{R})$ $\square$

Παρατηρήσαμε πιο πάνω πως η ομάδα $PSL_2(\mathbb{R})$ δρα μεταβατικά στο άνω ημιεπίππεδο H. Από τη θεωρία των δράσεων ομάδων γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια αμφεικόνιση

$$G/K \leftrightarrow H$$

από τον χώρο των συνσυνόλων G/K της υποομάδας K που διατηρεί ένα σημείο $x_0 \in H$. Η απεικόνιση είναι η $gK \mapsto gx_0$. Στην περίπτωσή μας εάν θέσουμε $x_0 = i$, τότε η K είναι η ομάδα των μετασχηματισμών

$$z \mapsto \frac{\cos\theta z + \sin\theta}{-\sin\theta z + \cos\theta}$$

που είναι ισόμορφη μέσω της $\theta \mapsto e^{2i\theta}$ με την ομάδα των μιγαδικών αριθμών με μέτρο 1.

Η προσέγγιση του Klein λέει ότι η γεωμετρία του άνω ημιεπιππέδου είναι βασικά η μελέτη αναλλοίωτων ποσοτήτων στο χώρο των συνσυνόλων και δίδει την δυνατότητα να δούμε την γεωμετρία αυτή διαφορετικά, να βρούμε δηλαδή έναν άλλο χώρο στον οποίο η $PSL_2(\mathbb{R})$ δρα μεταβατικά με τον ίδιο ισορροπιστή

K, κάτι που θα μελετήσουμε αμέσως.

Θεωρούμε τον χώρο των τετραγωνικών της προβολικής ευθείας $P(\mathbb{R}^2)$, δηλαδή το πραγματικό προβολικό επίπεδο που ορίζεται από τον πραγματικό διανυσματικό χώρο διάστασης 3 των τετραγωνικών μορφών

$$B(v,v) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2$$

στο $\mathbb{R}^2$. Οι ιδιάζουσες (singular) τετραγωνικές δίδονται από την εξίσωση

$$b^2 - 4ac = 0$$

η οποία εάν γραφεί ως

$$b^2 - (a+c)^2 + (a-c)^2$$

δίδει μια μη κενή μη εκφυλισμένη κωνική στο $P(\mathbb{R}^3)$. Θεωρούμε το υποσύνολο $D \subset P(\mathbb{R}^3)$ που ορίζεται ως

$$D = \{[a,b,c] \in P(\mathbb{R}^3) : b^2 - 4ac < 0\}.$$

Εάν $a + c = 0, b^2 - 4ac = b^2 + (a-c)^2 > 0$, τότε το D βρίσκεται στο συμπλήρωμα της ευθείας $a + c = 0$ του $P(\mathbb{R}^3)$ και μπορούμε να θεωρήσουμε το D ως το εσωτερικό του κύκλου $(b/(a+c))^2 + ((a-c)/(a+c))^2 = 1$ του $\mathbb{R}^2$. Η ομάδα $PGL_2(\mathbb{R})$ και η υποομάδα της $PSL_2(\mathbb{R})$ δρουν φυσικά στο χώρο των τετραγωνικών.

Τώρα όταν $b^2 - 4ac < 0$, τότε $a \neq 0$ και η τετραγωνική εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ έχει μιγαδικές συζυγείς ρίζες $z, \bar{z}$, μια εκ των οποίων, έστω η z, πρέπει να βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Η τετραγωνική μορφή παραγοντοποιείται ως $a(x_0 - zx_1)(x_0 - \bar{z}x_1)$. Αντίστροφα, κάθε $z \in H$ ορίζει ένα σημείο στο D μέσω της $(x_0 - zx_1)(x_0 - \bar{z}x_1)$. Συνεπώς έχουμε μια αμφεικόνιση

$$F : H \to D$$

που μετατίθεται με τη δράση της $PSL_2(\mathbb{R})$, πράγμα που σημαίνει ότι η γεωμετρία του D, του εσωτερικού μιας κωνικής του προβολικού επιπέδου, είναι ταυτόσημη με την γεωμετρία του H, του άνω μιγαδικού ημιεπιπέδου. Ιστορικά, το H λέγεται *μοντέλο Poincare* ενώ το D λέγεται *μοντέλο (Klein)-Beltrami*. Το καθένα έχει τα δικά του πλεονεκτήματα.

Στο μοντέλο (Klein)-Beltrami η έννοια της απόστασης ορίζεται ως εξής: δύο σημεία $X, Y \in D$ ορίζουν δύο τετραγωνικές και θεωρούμε την γραφίδα των τετραγωνικών που παράγεται από αυτές, την μοναδική προβολική ευθεία

στο $P(\mathbb{R}^3)$ που τις ενώνει. Αυτή τέμνει την κωνική σε δύο σημεία A και B, τις δυο ιδιάζουσες κωνικές της γραφίδας, οπότε έχουμε 4 σημεία σε μια ευθεία και έχουμε και μια αναλλοίωτη ποσότητα, το σταυρωτό πηλίκο.

Για να δούμε πως αυτό σχετίζεται με την υπερβολική απόσταση, αρκεί να θεωρήσουμε τα z, w ως φανταστικά, δηλαδή εάν $z = ix, w = iy$, τότε τα δύο σημεία $X = F(ix), Y = F(iy)$ στο D είναι οι τετραγωνικές

$$x_0^2 + x^2x_1^2, x_0^2 + y^2x_1^2$$

και η γραφίδα που παράγεται από αυτές είναι η

$$\lambda(x_0^2 + x^2x_1^2) + \mu(x_0^2 + y^2x_1^2) = (\lambda + \mu)x_0^2 + (\lambda x^2 + \mu y^2)x_1^2.$$

Θεωρώντας τις $[\lambda, \mu]$ ως ομογενείς συντεταγμένες αυτής της ευθείας στο $P(\mathbb{R}^3)$, έχουμε $X = [1, 0], Y = [0, 1]$ και οι δύο ιδιάζουσες τετραγωνικές συμβαίνουν όταν $\lambda + \mu = 0$ και $\lambda x^2 + \mu y^2 = 0$. Έτσι $A = [1, -1], B = [y^2, -x^2]$. Οπότε το σταυρωτό πηλίκο

$$(YX; AB) = x^2/y^2$$

οπότε και σε αυτό το μοντέλο

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \ln |(XY; AB)|.$$

17 Το Αξίωμα της Παραλληλίας

17.1 Το Ευκλείδειο Αίτημα

Η γεωμετρία του άνω μιγαδικού ημιεπιπέδου με τη δράση της ομάδας μετασχηματισμών $PGL_2(\mathbb{R})$, απέκτησε μεγάλη σπουδαιότητα στα τέλη κυρίως του 19ου αιώνα διότι αποτελεί ένα πολύ συγκεκριμένο παράδειγμα, το πρώτο ιστορικά, μιας μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας. Για πολλούς αιώνες η ανθρωπότητα θεωρούσε πως η σκέψη του Ευκλείδη που συνήγαγε τα γεωμετρικά θεωρήματα από αυταπόδεικτες έννοιες και αξιώματα, αντιπροσώπευε όχι απλά ένα πολύ επιτυχημένο μοντέλο του φυσικού κόσμου στον οποίο ζούμε αλλά και μια απόλυτη λογική δομή. Παρά ταύτα, υπήρχε ένα αξίωμα το οποίο φάνταζε παράταιρο και σύμφωνα με την κρατούσα άποψη θα έπρεπε να απορρέει από τα υπόλοιπα αξιώματα. Ουσιαστικά αποτελούσε θεώρημα, ένα θεώρημα όμως του οποίου η απόδειξη μας διέφευγε! Ο όρος που χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή του είναι *αξίωμα* ή καλύτερα *αίτημα της παραλληλίας*, μιας και ο όρος *αίτημα*, σημαίνει ακριβώς αυτό: μια πρόταση που πιστεύουμε ότι ισχύει αλλά δεν μπορούμε να την αποδείξουμε. Με τα λόγια του ίδιου του Ευκλείδη, αυτό περιγράφεται ως εξής: *...αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε η εσωτερική γωνία της ίδιας πλευράς να είναι μικρότερη από δύο ορθές γωνίες, τότε οι δύο ευθείες αν προεκταθούν απεριόριστα θα συναντηθούν στην πλευρά στην οποία οι γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές.*

Διάφορες ισοδύναμες διατυπώσεις παρουσιάστηκαν κατά καιρούς, ίσως η πιο γνωστή διατύπωση είναι αυτή του Playfair το 1795: *Από δοσμένο σημείο P εκτός μιας ευθείας l, υπάρχει μοναδική ευθεία που διέρχεται από το σημείο P και δεν τέμνει την l.*

Διάφοροι σχολιαστές του περίφημου έργου του Ευκλείδη *'Στοιχεία'* όπως ο στωϊκός Ποσειδώνιος, ο Γέμινος (1ος αιώνας π.Χ.), ο Πτολεμαίος (2ος αιώνας μ.Χ.) ή ο Πρόκλος (410-485 μ.Χ.), όλοι είχαν την αίσθηση ότι το αξίωμα της παραλληλίας δεν ήταν προφανές για να γίνει αποδεκτό χωρίς κάποιου είδους απόδειξη. Η ιδιότυπη αυτή διαφωνία μεταξύ του Ευκλείδη και των μεταγενέστερων μαθηματικών συνεχίστηκε με τον Άραβα μαθηματικό Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274).

Οι περισσότερες προσπάθειες για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιούσαν τη μέθοδο της *εις άτοπον απαγωγής*. Το *άτοπο* που προσπαθούσαν να καταλήξουν ήταν πως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ήταν μικρότερο από δύο ορθές, ωστόσο όλες οι αποδείξεις είχαν κενά. Έπρεπε να περιμένουμε μέχρι την εμφάνιση των Gauss, Bolyai, Lobatchevsky για να αποδειχθεί

πως όντως υπάρχει μια γεωμετρία, η λεγόμενη *υπερβολική γεωμετρία*, στην οποία ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη **εκτός** από το αξίωμα της παραλληλίας. Με άλλα λόγια, ο Ευκλείδης είχε κάνει λάθος στην εικασία του και φυσικά όλες οι αποδείξεις που είχαν παρουσιαστεί ήταν όντως λανθασμένες διότι απλούστατα η πρόταση που προσπαθούσαμε να αποδείξουμε ήταν λάθος: *το αξίωμα της παραλληλίας δεν προκύπτει από τα υπόλοιπα αξιώματα της γεωμετρίας του Ευκλείδη, αλλά είναι τελείως ανεξάρτητο!* (Η περίπτωση ίσως θυμίζει την γνωστή ιστορία με το αξίωμα της επιλογής και τα υπόλοιπα 9 αξιώματα Zermelo-Fraenkel της αξιωματικής θεωρίας συνόλων). Η υπερβολική γεωμετρία ανακαλύφθηκε σχεδόν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα από τον Ρουμάνο-Ούγγρο Janos Bolyai (1802-1860) και τον Ρώσσο Nikolai Lobachevsky (1793-1856) ενώ σημαντική ήταν και η συνεισφορά του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

17.2 Τα Αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Τα αξιώματα του Ευκλείδη απέκτησαν πιο αυστηρή και σύγχρονη διατύπωση από τον D. Hilbert στα τέλη του 19ου, αρχές του 20ου αιώνα. Τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας του Hilbert ξεκινούν με κάποιες πρωταρχικές έννοιες που δεν μπορούν να οριστούν και προκύπτουν από την ανθρώπινη διαίσθηση. Αυτές οι πρωταρχικές έννοιες στη σύγχρονη αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών (που ξεκίνησε από τον B. Russell και έλαβε την πλήρη μορφή της με τα αξιώματα Zermelo-Fraenkel με ή χωρίς το αξίωμα της επιλογής), ονομάζονται *ενοράσεις* (intuitions). Τέτοιες έννοιες είναι η έννοια του *σημείου*, της *ευθείας*, η έννοια του *περιέχεσθαι* (η σχέση σημείου και ευθείας, αν ένα σημείο ανήκει ή όχι σε κάποια ευθεία), η έννοια του *ανάμεσα*, η έννοια της *συμφωνίας (congruence)* ζευγών σημείων και η έννοια της *συμφωνίας (congruence)* μεταξύ γωνιών. Τα αξιώματα είναι τα παρακάτω πέντε (χρησιμοποιήσαμε την αγγλική μετάφραση του έργου των *Hilbert and Cohn-Vossen*: *Geometry and the Imagination*):

I. Αξιώματα Περίστασης (Axioms of Incidence)

1. Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.

2. Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία.

3. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

II. Αξιώματα Διάταξης (Axioms of Order)

1. Από τρία τυχαία σημεία πάνω σε μια ευθεία, μόνο ένα εξ αυτών βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.

2. Εάν A και B είναι δύο τυχαία σημεία σε μια ευθεία, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο C της ευθείας που βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και B.

3. Κάθε ευθεία που τέμνει μια πλευρά ενός τριγώνου, είτε περνά και από την απέναντι (τρίτη) κορυφή του τριγώνου είτε τέμνει και κάποια άλλη πλευρά.

III. Αξιώματα Συμφωνίας (Axioms of Congruence)

1. Σε μια ευθεία, ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να τοποθετηθεί και στις δύο μεριές (στα δεξιά ή στα αριστερά) ενός δοσμένου σημείου. Το ευθύγραμμο τμήμα που κατασκευάζεται με τον τρόπο αυτόν είναι *σύμφωνο* (congruent) με το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.

2. Εάν δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι σύμφωνα με κάποιο τρίτο, τότε είναι σύμφωνα και μεταξύ τους.

3. Εάν AB και $A'B'$ είναι δύο σύμφωνα ευθύγραμμα τμήματα και εάν τα σημεία C και C' που βρίσκονται στα AB και $A'B'$ αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα στα οποία το AB διαιρείται από το C να είναι σύμφωνο με ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα στα οποία το $A'B'$ διαιρείται από το C', τότε και το άλλο ευθύγραμμο τμήμα του AB είναι σύμφωνο με το άλλο ευθύγραμμο τμήμα του $A'B'$.

4. Μια δοθείσα γωνία μπορεί να τοποθετηθεί με μοναδικό τρόπο σε καθεμία από τις δύο μεριές μιας δοσμένης ημιευθείας, οπότε η γωνία που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο να είναι *σύμφωνη* (congruent) με τη δοσμένη γωνία.

5. Εάν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες με τις αντίστοιχες δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και εάν και οι περιεχόμενες στις δύο αυτές πλευρές αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι *σύμφωνα* (congruent).

IV. Αξίωμα Παραλληλίας (Axiom of Parallelism)

Από κάθε σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική ευθεία που δεν τέμνει τη δοσμένη ευθεία.

V. Αξιώματα Συνέχειας (Axioms of Continuity)

1. Εάν AB και CD είναι δύο τυχαία ευθύγραμμα τμήματα, τότε στην ευθεία AB υπάρχουν σημεία A_1, A_2,...,A_n τέτοια ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα AA_1, A_1A_2, A_2A_3,...,$A_{n-1}A_n$ να είναι σύμφωνα με το CD και το σημείο B να βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και A_n.

2. Κάθε άπειρη ακολουθία από φωλιασμένα ευθύγραμμα τμήματα (που το ένα βρίσκεται μέσα στο άλλο, nested segments), έχει ένα κοινό σημείο.

Σχόλιο (για τη μετάφραση): Η μετάφραση του όρου congruent ως *σύμφωνος* προκύπτει από το πολύτομο λεξικό Αγγλικής Γλώσσας της Οξφόρδης που γράφει στο λήμμα αυτό, ως πρώτη ερμηνεία, τα εξής: **congruence:** the fact or condition of according or agreeing. Στην ελληνική βιβλιογραφία συχνά χρησιμοποιείται ο όρος *όμοιος* για την απόδοση του congruent. Δεν υιοθετή-

σαμε αυτή τη μετάφραση για τρείς λόγους: ο πρώτος είναι αυτό που γράψαμε παραπάνω για την ερμηνεία του όρου στην Αγγλική. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι με τον όρο όμοιος αποδίδεται στα ελληνικά η αγγλική λέξη similar. Ο τρίτος λόγος είναι ο εξής: από το γυμνάσιο είμαστε στην Ελλάδα εξοικοιωμένοι με τον όρο *όμοιος*, για παράδειγμα από τα τρίγωνα: εξ ορισμού, δύο τρίγωνα λέγονται όμοια εάν έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες. Από το Αξίωμα III 5 φαίνεται ότι η χρήση του όρου congruent από τον Hilbert σημαίνει αυτό που στο γυμνάσιο καλούσαμε ισότητα τριγώνων και όχι ομοιότητα. Εξ ορισμού, δύο τρίγωνα λέγονται ίσα εάν οι πλευρές τους είναι ίσες μία προς μία. Το αξίωμα III 5 του Hilbert στο γυμνάσιο στην Ελλάδα παρουσιάζεται ως ένα από τα λεγόμενα κριτήρια ισότητας των τριγώνων. Η ουσία πάντως είναι πως από τα παραπάνω φαίνεται πως ο όρος όμοιος δεν είναι σωστός για να αποδώσει την αγγλική λέξη congruent ενώ ταυτόχρονα δημιουργεί σύγχυση με αυτά που (ορθώς ή όχι) γνωρίζουμε από το γυμνάσιο αφού σημαίνει ίσος και όχι όμοιος (βέβαια δύο ίσα τρίγωνα είναι πάντοτε και όμοια αλλά το αντίστροφο φυσικά δεν ισχύει). Σημειώνουμε τέλος πως ο όρος congruence, congruent υπάρχει και στη θεωρία αριθμών και σημαίνει την ιδιότητα δύο ακέραιων αριθμών που αν διαιρεθούν και οι δύο με τον ίδιο τρίτο ακέραιο αριθμό αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Η βασική ιδιότητα της υπερβολικής γεωμετρίας που δεν έχουμε αναφέρει είναι η έννοια της ευθείας. Αυτό γίνεται ευκολότερα στο μοντέλο Beltrami, είναι η τομή μιας προβολικής ευθείας του προβολικού επιπέδου $P(\mathbb{R}^3)$ με το εσωτερικό D της κωνικής που προφανώς δεν ικανοποιεί το αξίωμα της παραλληλίας.

Στο μοντέλο Poincare έχουμε το εξής:
Πρόταση 1. Στο άνω ημιεπίπεδο, μια ευθεία είτε είναι μια ημιευθεία παράλληλη στον φανταστικό άξονα είτε ένα ημικύκλιο που τέμνει τον πραγματικό άξονα ορθογώνια.

Απόδειξη: Η απεικόνιση $F : H \to D$ ορίζεται σε ομογενείς συντεταγμένες ως

$$z \mapsto [1, -(z + \bar{z}), z\bar{z}]$$

οπότε αφού μια ευθεία στο μοντέλο Beltrami δίδεται από μια προβολική ευθεία $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, στο άνω ημιεπίπεδο αυτή είναι

$$a_0 - a_1(z + \bar{z}) + a_2z\bar{z} = 0.$$

Εάν $a_2 = 0$ αυτή είναι ευθεία της μορφής $ax + b = 0$, δηλαδή $x = const$, η οποία για $y > 0$ είναι ημιευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$. Διαφορετικά είναι η τομή του κύκλου

$$a_2(x^2 + y^2) - 2a_1x + a_0 = 0$$

με το D και είναι της μορφής

$$(x-a)^2+y^2=c$$

που είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $(a,0)$ πάνω στον άξονα $x'x$. $\square$

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι τα ix, iy, iz βρίσκονται στην υπερβολική ευθεία και εάν $x>y>z$, τότε

$$d(x,z)=\ln x-\ln z=\ln x-\ln y+\ln y-\ln z=d(x,y)+d(y,z)$$

.

Όμως υπάρχει μοναδική ευθεία που συνδέει δύο σημεία από το μοντέλο Beltrami, άρα υπάρχει ένα στοιχείο της ομάδας $PSL_2(\mathbb{R})$ που απεικονίζει μια ευθεία σε οποιαδήποτε άλλη οπότε το παραπάνω ισχύει για κάθε ευθεία.

Το γεγονός ότι η υπερβολική γεωμετρία ικανοποιεί όλα τα αξιώματα εκτός από αυτό της παραλληλίας σήμερα έχει μόνο ιστορική σημασία και ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να το ελέγξει. Συχνά ένα μοντέλο είναι πιο εύκολο από το άλλο και η συμφωνία πρέπει να ορισθεί μέσω της δράσης της ομάδας $PGL_2(\mathbb{R})$. Αναφέραμε ότι αυτή δρα φυσικά στο D (και όχι μόνο η υποομάδας της $PSL_2(\mathbb{R})$). Στο H θα πρέπει να προσθέσουμε τους μετασχηματισμούς της μορφής

$$z\mapsto\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

με $ad-bc=-1$ για να πάρουμε τη δράση της $PGL_2(\mathbb{R})$.

Τελικά θα πρέπει να σημειώσουμε την σχέση που έχουν αυτά με το μάθημα της Διαφορικής Γεωμετρίας (Γεωμετρία Επιφανειών). Το άνω ημιεπίπεδο έχει μια μετρική Ρήμαν (πρώτη θεμελιώδη μορφή)

$$\frac{dx^2+dy^2}{y^2}.$$

Αυτή αποτελεί μια αλλαγή κλίμακας (rescaling) της επίπεδης μετρικής dx^2+dy^2 από την θετική συνάρτηση y^{-2}, κάτι που *μεταβάλλει τα μήκη αλλά όχι τις γωνίες*. Στις συντεταγμένες x,y του H, οι γωνίες μεταξύ καμπυλών που μετρώνται από την υπερβολική μετρική είναι συνεπώς οι Ευκλείδειες γωνίες. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η μετρική είναι *σύμμορφα επίπεδη*. Στο μοντέλο Beltrami έχουμε ομοπαραλληλικές συντεταγμένες ως προς τις οποίες οι γραμμές της υπερβολικής γεωμετρίας γίνονται ευθείες. Στην πραγματικότητα οι *γεωδαισιακές* της υπερβολικής μετρικής είναι είτε ημιευθείες παράλληλες στον φανταστικό

άξονα είτε ημικύκλια που τέμνουν τον πραγματικό άξονα ορθογώνια. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η μετρική είναι *προβολικά επίπεδη*. Η υπερβολική απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι η μετρική απόσταση οπότε τα βασικά αξιώματα του ορισμού ενός μετρικού χώρου ισχύουν για την $d(z, w)$.

17.3 Η προβολική γεωμετρία και τα αξιώματα του Ευκλείδη

Θεωρούμε τώρα το άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο H, τη δράση της ομάδας $PGL_2(\mathbb{R})$ σε αυτό και τη μετρική συνάρτηση

$$d(z, w) := \sinh^{-1} \sqrt{(\overline{z}\ w; \overline{w}\ z)}.$$

Αυτή μας επιτρέπει να ορίσουμε συμφωνία μεταξύ ζευγών σημείων: τα ζεύγη σημείων (z_1, w_1) και (z_2, w_2) είναι *σύμφωνα* εάν και μόνο εάν

$$d(z_1, w_1) = d(z_2, w_2)$$

Η ομάδα $PGL_2(\mathbb{R})$ εμπλέκεται στην έννοια της συμφωνίας μέσω της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση 1. Έστω (z_1, w_1) και (z_2, w_2) δύο σύμφωνα ζεύγη σημείων. Τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\tau \in PGL_2(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $z_2 = \tau(z_1)$ και $w_2 = \tau(w_1)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα τρία διαφορετικά σημεία z_1, w_1, $\overline{w}_1 \in \mathbb{C} \subset P(\mathbb{C}^2)$, και τα σημεία z_2, w_2, $\overline{w}_2$. Από το θεώρημα 4.2.1 υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός $\tau \in PGL_2(\mathbb{C})$ τέτοιος ώστε $\tau(z_1) = z_2$, $\tau(w_1) = w_2$, $\tau(\overline{w}_1) = \overline{w}_2$. Όμως επειδή τα ζεύγη είναι συζυγή, ο ορισμός της απόστασης μέσω του σταυρωτού πηλίκου σημαίνει ότι

$$(\overline{z}_1\ w_1; \overline{w}_1\ z_1) = (\overline{z}_2\ w_2; \overline{w}_2\ z_2) = (\overline{z}_2\ \tau(w_1); \tau(\overline{w}_1)\ \tau(z_1).$$

Συνεπώς, από την αναλλοιότητα του σταυρωτού πηλίκου κάτω από προβολικούς μετασχηματισμούς, έχουμε $\tau(\overline{z}_1) = \overline{z}_2$. Οπότε έχουμε $\tau(\overline{z}_1) = \overline{\tau(z_1)}$ και $\tau(\overline{w}_1) = \overline{\tau(w_1)}$. Με άλλα λόγια έχουμε δύο λύσεις, τις $z = \overline{z}_1$ και $z = \overline{w}_1$ στο κάτω μιγαδικό ημιεπίπεδο της εξίσωσης

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\overline{a}z + \overline{b}}{\overline{c}z + \overline{d}}.$$

Αυτή είναι μια τετραγωνική (τριώνυμο ως προς z), με φανταστικούς συντελεστές:

$$(a\overline{c} - \overline{a}c)z^2 + (b\overline{c} - \overline{b}c + a\overline{d} - \overline{a}d)z + (b\overline{d} - \overline{b}d) = 0$$

η οποία είτε μηδενίζεται εκ ταυτότητος είτε έχει πραγματικές ή μιγαδικές συζυγείς ρίζες. Αυτό όμως είναι αδύνατο διότι οι $\overline{z}_1$ και $\overline{w}_1$ έχουν αρνητικό φανταστικό μέρος. Άρα η σχέση (εξίσωση)

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\overline{a}z+\overline{b}}{\overline{c}z+\overline{d}}$$

ισχύει εκ ταυτότητος, οπότε ο προβολικός μετασχηματισμός τ μετατίθεται με τη (μιγαδική) συζυγία, οπότε $\tau \in PGL_2(\mathbb{R})$. $\square$

Η συμφωνία μπορεί συνεπώς να ορισθεί μέσω μιας γεωμετρικής κίνησης του χώρου H (άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο): δύο ζεύγη σημείων είναι σύμφωνα εάν υπάρχει ένα στοιχείο $\tau \in PGL_2(\mathbb{R})$ που να απεικονίζει το ένα ζευγάρι σημείων στο άλλο ζευγάρι σημείων.

17.4 Ευθείες του άνω μιγαδικού ημιεπιπέδου

Θα πρέπει να ορίσουμε ευθείες στο άνω μιγαδικό επίπεδο H. Ο ορισμός που δίδουμε είναι ο εξής: η *ευθεία* που ενώνει τα σημεία z_1 και w_1 είναι το σύνολο των σημείων $z \in H$ που είναι τέτοια ώστε το παρακάτω σταυρωτό πηλίκο να είναι *πραγματικός αριθμός*:

$$(\overline{z}_1\ w_1; \overline{w}_1\ z) \in \mathbb{R}$$

Φανερά, από την αναλλοιότητα του σταυρωτού πηλίκου, η ομάδα $PGL_2(\mathbb{R})$ απεικονίζει ευθείες σε ευθείες.

Για να δούμε με τι μοιάζουν αυτές οι ευθείες, θεωρούμε $z_1 = i$ και $w_1 = ia$. Από την Πρόταση 16.3.1 κάθε ευθεία είναι ισοδύναμη, κάτω από την δράση της ομάδας, με μια ευθεία αυτής της μορφής. Αποκτάμε λοιπόν

$$(\overline{z}_1\ w_1; \overline{w}_1\ z) = (-i\ ia; -ia\ z) = \frac{-(1-a)(z-ia)}{(z+i)2}$$

το οποίο είναι πραγματικό εάν και μόνο εάν το z είναι φανταστικό. Συνεπώς ολόκληρος ο φανταστικός άξονας αποτελεί μια ευθεία.

Οι υπόλοιπες ευθείες αποκτώνται εφαρμόζοντας τη δράση των στοιχείων $\tau \in PGL_2(\mathbb{R})$ στο φανταστικό άξονα. Βρίσκουμε ότι η

$$z = \frac{iat + b}{ict + d}$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, περιγράφει μια *ευθεία* παράλληλη στο φανταστικό άξονα (αν $c = 0$) ή έναν *κύκλο* που μετασχηματίζεται στον εαυτό του κάτω από τη μιγαδική συζυγία $z \mapsto \overline{z}$ οπότε τέμνει το φανταστικό άξονα ορθογώνια.

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων ia και ib του φανταστικού άξονα θα είναι:

$$d(ia, ib) = \sinh^{-1}[\sqrt{(-ia\ ib; -ib\ ia)}] = \sinh^{-1}[\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}}] = \frac{1}{2}|\log b - \log a|$$

Συνεπώς εάν παραμετρήσουμε το θετικό φανταστικό ημιάξονα με τη συνάρτηση ie^x, η απόσταση είναι απλά η Ευκλείδεια απόσταση κατά μήκος μιας ευθείας. Αυτό δίδει τα αξιώματα συνέχειας V 1 και V 2 καθώς επίσης και τα αξιώματα I-II 1 και III 3, καθώς και τα αξιώματα II 1 και II 2 μαζί με τα αξιώματα I 2 και I 3.

Το γεγονός ότι υπάρχει μοναδική γραμμή που ενώνει δύο διαφορετικά σημεία, προκύπτει φανερά από το γεγονός ότι όλοι οι κύκλοι (που αντιπροσωπεύουν τις ευθείες), τέμνουν το φανταστικό άξονα το πολύ σε ένα σημείο.

17.5 Γωνίες στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο

Έχοντας ορίσει τις ευθείες της γεωμετρίας μας (που όπως είδαμε είναι είτε ευθείες παράλληλες στο φανταστικό άξονα είτε κύκλοι), σειρά έχουν οι γωνίες. Υπάρχει μια αριθμητική γωνία μεταξύ δύο ευθειών η οποία διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της ομάδας $PGL_2(\mathbb{R})$, και αυτή είναι η συνήθης γωνία στο επίπεδο (Argand) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Αυτό συμβαίνει διότι οι μετασχηματισμοί

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

είναι *ολόμορφοι*, συνεπώς όπως γνωρίζουμε από τη μιγαδική ανάλυση διατηρούν τις γωνίες. Αυτό αρκεί για να πάρουμε το αξίωμα III 4. Μπορούμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε και την ομάδα μετασχηματισμών:

Πρόταση 1. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\tau \in PGL_2(\mathbb{R})$ που απεικονίζει μια ημιευθεία σε μια άλλη ημιευθεία.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 16.3.1 κάθε ημιευθεία, μέσω της δράσης ενός στοιχείου της ομάδας, μπορεί να απεικονισθεί στην ημιευθεία $z = it$ $(t \geq 1)$. Εάν τ και τ' είναι δύο τέτοιοι μετασχηματισμοί, τότε υπάρχει μετασχηματισμός $\rho = \tau'\tau^{-1} \in PGL_2(\mathbb{R})$ που καθορίζει τη φανταστική μονάδα i και απεικονίζει την ημιευθεία στον εαυτό της. Όμως τότε

$$\rho(it) = \frac{iat + b}{ict + d} = is, \forall t \geq 1$$

από το οποίο έπεται ότι $c = 0$ και $b = 0$. Εάν $\rho(i) = i$, τότε $a/d = 1$, οπότε το ρ είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός (μοναδιαίος πίνακας). Συνεπώς $\tau' = \tau$. $\square$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, βλέπουμε πως υπάρχει μοναδικός τρόπος να μετασχηματιστούν δύο ημιευθείες με κοινή αρχή κάποιο σημείο έστω $z \in H$, σε δύο ημιευθείες με κοινή αρχή το σημείο $w \in H$ έτσι ώστε μια ημιευθεία από τα ζευγάρια να ταυτίζεται. Η *συμφωνία* γωνιών καθορίζεται από το εάν ταυτίζονται και οι άλλες δύο ημιευθείες από τα θεωρούμενα δύο ζεύγη ημιευθειών.

Η παραπάνω διαδικασία αποτελεί την εξήγηση της λέξης *...να τοποθετηθεί* (στην καθεμιά πλευρά μιας δοσμένης ημιευθείας...), που αναγράφεται στο αξίωμα III 4. Οι μετασχηματισμοί της ομάδας $PGL_2(\mathbb{R})$ διατηρούν τις *πλευρές* (δηλαδή τον τρόπο που αισθανόμαστε το χώρο), οπότε για να τοποθετήσουμε την γωνία στην αντίθετη πλευρά της ημιευθείας θα χρειαζόμασταν ένα γενικότερο μετασχηματισμό. Όμως η ανάκλαση στον άξονα $y'y$

$$z \mapsto -\overline{z}$$

διατηρεί επίσης τις αποστάσεις, αφού

$$(-\overline{z} \ -w; -\overline{w} \ -z) = (\overline{z} \ w; \overline{w} \ z)$$

Αυτή η ανάκλαση σε μια ημιευθεία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πλήρη δικαιολόγηση και ικανοποίηση του Αξιώματος III 4.

17.6 Συζυγία Τριγώνων

Το μόνο εναπομείναν Αξίωμα είναι το III 5 που αφορά τη συζυγία τριγώνων. Εάν δύο τρίγωνα με κορυφές έστω τα σημεία του άνω μιγαδικού ημιεπιπέδου z_0, z_1, z_2 και w_0, w_1, w_2 αντίστοιχα, έχουν $d(z_0, z_1) = d(w_0, w_1)$ και οι γωνίες των κορυφών z_0 και w_0 είναι συζυγείς, τότε, (πιθανόν μετά από μια κατάλληλη

ανάκλαση), από την Πρόταση 16.3.1 έπεται ότι υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός $\tau \in PGL_2(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $\tau(z_0) = w_0$ και $\tau(z_1) = w_1$ και ο οποίος απεικονίζει την ημιευθεία που διέρχεται από τα σημεία z_0 και z_2 στην ημιευθεία που διέρχεται από τα σημεία w_0 και w_2. Μπορούμε όμως να παραμετρήσουμε τη γραμμή με τον Ευκλείδειο τρόπο χρησιμοποιώντας την απόσταση (το μήκος τόξου), οπότε αν $d(z_0, z_2) = d(w_0, w_2)$, τότε $z_2 = w_2$. Άρα ο μετασχηματισμός τ απεικονίζει ολόκληρο το τρίγωνο z_0, z_1, z_2 στο τρίγωνο w_0, w_1, w_2 και συνεπώς όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες είναι σύμφωνες.

Όμως, το αξίωμα της παραλληλίας ολοφάνερα δεν ισχύει: υπάρχουνν πολλές ευθείες που διέρχονται από το σημείο έστω $z \notin i\mathbb{R}$ και που δεν τέμνουν το φανταστικό άξονα.

Η γεωμετρία που περιγράψαμε παραπάνω λέγεται και *υπερβολική γεωμετρία* του επιπέδου. Έτσι *βλέπει* το Ευκλείδειο επίπεδο κάποιος ομαλά επιταχυνόμενος παρατηρητής σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του A. Einstein.

18 Παράρτημα

Για ευκολία στους αναγνώστες, παραθέτουμε στο παράρτημα τους ορισμούς της ομάδας, του δακτυλίου, του σώματος, του διανυσματικού χώρου, της (γραμμικής) άλγεβρας, της εμφύτευσης και της εμβάπτισης.

Έστω A ένα μη-κενό σύνολο. Ως *εσωτερική πράξη* $*$ στο A εννοούμε μια απεικόνιση $* : A \times A \to A$. Εάν A, F δύο μη-κενά σύνολα, τότε ως *εξωτερική πράξη* $\cdot$ στο Α εννοούμε μια απεικόνιση $\cdot : F \times A \to A$.

Ορισμός 1. Έστω το ζεύγος $(G, *)$ που αποτελείται από ένα μη-κενό σύνολο G εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη $*$. Το ζεύγος $(G, *)$ θα λέμε ότι αποτελεί *ομάδα* εάν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:
(α). Ισχύει η *προσεταιριστική ιδιότητα*: $a * (b * c) = (a * b) * c$, $\forall a, b, c \in G$.
(β). Υπάρχει ένα στοιχείο $e \in G$ που θα λέγεται *ουδέτερο στοιχείο (της πράξης* $*$*)*, για το οποίο ισχύει ότι $e * g = g * e = g$, $\forall g \in G$.
(γ). Για κάθε στοιχείο $g \in G$ υπάρχει στοιχείο $g' \in G$ που λέγεται *συμμετρικό στοιχείο* του g (ως προς την πράξη $*$), τέτοιο ώστε $g * g' = g' * g = e$.

Αποδεικνύεται εύκολα πως το ουδέτερο στοιχείο και το συμμετρικό στοιχείο (κάθε στοιχείου) σε μια ομάδα είναι *μοναδικά*.

Εάν στην ομάδα $(G, *)$ ισχύει και η *αντιμεταθετική ιδιότητα*, δηλαδή εάν ισχύει $a*b = b*a$, $\forall a, b \in G$, τότε η ομάδα λέγεται *αντιμεταθετική* ή *Αβελιανή*.

Παραδείγματα ομάδων αποτελούν τα ζεύγη $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, δηλαδή τα σύνολα των ακέραιων, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα με πράξη τη γνωστή μας πρόσθεση.

Ορισμός 2. Μια τριάδα $(R, +, \cdot)$ αποτελούμενη από ένα μη-κενό σύνολο R εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις $+$ (που συνήθως θα τη λέμε πρόσθεση χωρίς κατ' ανάγκη να ταυτίζεται με τη γνωστή πρόσθεση) και $\cdot$ (που συνήθως θα τη λέμε πολλαπλασιασμό χωρίς κατ' ανάγκη να ταυτίζεται με το γνωστό πολλαπλασιασμό) θα λέγεται *δακτύλιος* εάν ισχύουν τα εξής:
(α). Το ζεύγος $(R, +)$ αποτελεί Αβελιανή ομάδα.
(β). Στην πράξη $\cdot$ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.
(γ). Η πράξη $\cdot$ είναι *επιμεριστική* από δεξιά και από αριστερά ως προς την πράξη $+$, δηλαδή ισχύουν τα εξής:
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ και $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot z$, $\forall x, y, z \in R$.

Εάν η πράξη $\cdot$ του πολλαπλασιασμού είναι αντιμεταθετική, τότε ο δακτύλιος

λέγεται αντιμεταθετικός δακτύλιος. Εάν υπάρχει ουδέτερο (μοναδιαίο) στοιχείο ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού $\cdot$ τότε ο δακτύλιος λέγεται δακτύλιος με μονάδα.

Παραδείγματα δακτυλίων είναι τα $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, δηλαδή τα σύνολα των ακέραιων, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Ορισμός 3. Μια τριάδα $(F, +, \cdot)$ αποτελούμενη από ένα μη-κενό σύνολο F εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις $+$ (που συνήθως θα τη λέμε πρόσθεση χωρίς κατ' ανάγκη να ταυτίζεται με τη γνωστή πρόσθεση) και $\cdot$ (που συνήθως θα τη λέμε πολλαπλασιασμό χωρίς κατ' ανάγκη να ταυτίζεται με το γνωστό πολλαπλασιασμό) θα λέγεται *σώμα* εάν ισχύουν τα εξής:
(α). Η τριάδα $(F, +, \cdot)$ αποτελεί μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα.
(β). Εάν $F^* := F - \{0\}$ (όπου με 0 συμβολίζουμε το μηδενικό στοιχείο, δηλαδή το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης), τότε το ζεύγος $(F^*, \cdot)$ αποτελεί ομάδα.

Δηλαδή σώμα είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα του οποίου όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία έχουν αντίστροφο.

Παραδείγματα σωμάτων αποτελούν τα σύνολα των ρητών, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών εφοδιασμένα με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Ορισμός 4. Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και V ένα μη-κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη '$+$' που θα τη λέμε *πρόσθεση* και με μια εξωτερική πράξη '$\cdot$' που θα τη λέμε *βαθμωτό πολλαπλασιασμό*. Η τετράδα $(\mathbb{F}, V, +, \cdot)$ θα λέγεται *διανυσματικός χώρος* (με σώμα $\mathbb{F}$) αν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:
(α). Το ζεύγος $(V, +)$ αποτελεί *Αβελιανή ομάδα*.
(β). Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες (υποθέτουμε ότι $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $a, b \in V$):
• $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$
• $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$
• $(\lambda\mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$, όπου στην αριστερή παρένθεση εννοείται ο πολλαπλασιασμός μεταξύ των στοιχείων του σώματος
• $1 \cdot a = a$, όπου $1 \in \mathbb{F}$ το μοναδιαίο στοιχείο (ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού) στο σώμα $\mathbb{F}$.

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων με σώμα τους πραγματικούς αριθμούς αποτελούν τα σύνολα των ελεύθερων διανυσμάτων του επιπέδου και του χώρου.

Ορισμός 5. Μια πεντάδα $(\mathbb{F}, V, +, *, \cdot)$ αποτελούμενη από ένα σώμα $\mathbb{F}$, ένα μη-κενό σύνολο V, δύο εσωτερικές πράξεις $+$ και $*$ στο V (που θα τις λέμε αντίστοιχα πρόσθεση και πολλαπλασιασμό χωρίς κατ' ανάγκη να ταυτίζονται με τη γνωστή πρόσθεση και το γνωστό πολλαπλασιασμό) και μια εξωτερική πράξη $\cdot$ στο V, δηλαδή $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$, (που θα τη λέμε βαθμωτό πολλαπλασιασμό), θα λέγεται *(γραμμική) άλγεβρα επί του σώματος* $\mathbb{F}$, εάν ισχύουν τα εξής:
(α). Η τετράδα $(\mathbb{F}, V, +, \cdot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο με σώμα το $\mathbb{F}$.
(β). Η τριάδα $(V, +, *)$ αποτελεί δακτύλιο με μονάδα.
(γ). Ισχύει η εξής ιδιότητα: $\lambda \cdot (f * g) = (\lambda \cdot f) * g = f * (\lambda \cdot g)$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ και $\forall f, g \in V$.

Παραδείγματα πραγματικών (γραμμικών) αλγεβρών (πεπερασμένης διάστασης) αποτελούν τα σύνολα $M_n(\mathbb{R})$, (για $n \in \mathbb{N}$ με $1 < n < \infty$), των $n \times n$ πραγματικών τετραγωνικών πινάκων με πρόσθεση τη γνωστή πρόσθεση των πινάκων, πολλαπλασιασμό το γνωστό πολλαπλασιασμό των πινάκων και βαθμωτό πολλαπλασιασμό το γνωστό πολλαπλασιασμό (πραγματικού) αριθμού $\cdot$ πίνακα.

Παράδειγμα πραγματικής (γραμμικής) άλγεβρας άπειρης διάστασης αποτελεί το σύνολο $C_0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f$ συνεχής και $f(x) < \infty, \forall x \in \mathbb{R}\}$ των πεπερασμένων συνεχών πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $C_0(\mathbb{R})$ ορίζονται *κατά σημείο* (pointwise), χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες πράξεις στο $\mathbb{R}$ ως εξής: $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, και $(f * g)(x) := f(x)g(x)$, $\forall f, g \in C_0(\mathbb{R})$. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζεται πάλι κατά σημείο χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιασμό μεταξύ των πραγματικών αριθμών ως εξής: $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$, $\forall f \in C_0(\mathbb{R})$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Για να δώσουμε τον ορισμό της εμφύτευσης και της εμβάπτισης, πρέπει να γνωρίζουμε ορισμένες βασικές έννοιες από την τοπολογία. Αρχίζουμε με τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 6. Έστω X μη-κενό σύνολο. Μια κλάση T υποσυνόλων του X λέμε πως ορίζει μια *τοπολογία* στο X εάν ικανοποιούνται τα παρακάτω:
(α). Ισχύει ότι $X \in T$ και $\emptyset \in T$, όπου $\emptyset$ το κενό σύνολο.
(β). Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους μελών της T ανήκει επίσης στην T.
(γ). Η τομή οποιωνδήποτε δύο μελών της T ανήκει επίσης στην T.

Το ζεύγος (X, T) λέγεται *τοπολογικός χώρος* αλλά για συντομία θα γράφουμε μόνο το σύνολο X έχοντας καταστήσει σαφές ποια τοπολογία θεωρούμε κάθε φορά (από τον ορισμό φαίνεται καθαρά πως κάθε σύνολο επιδέχεται πολ-

λές τοπολογίες). Τα μέλη της T λέγονται *ανοιχτά υποσύνολα* του συνόλου X.

Αν στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίσουμε ως ανοικτά υποσύνολα τα γνωστά ανοικτά διαστήματα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ με κέντρο κάποιο τυχαίο σημείο $x \in \mathbb{R}$ και ακτίνα ϵ, όπου ϵ κάποιος θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}$ αποτελεί τοπολογικό χώρο και η συγκεκριμένη τοπολογία λέγεται *συνήθης τοπολογία του* $\mathbb{R}$. Το παραπάνω γενικεύεται με προφανή τρόπο στους διανυσματικούς χώρους μεγαλύτερης διάστασης $\mathbb{R}^n$, όπου τώρα τα ανοικτά υποσύνολα θα είναι ανοικτές σφαίρικές περιοχές διάστασης n με κέντρο κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα ϵ.

Έστω X μια επιφάνεια (πολλαπλότητα διάστασης 2). Χωρίς να μπούμε σε πολλές λεπτομέρειες, μπορεί κανείς να καταλάβει πως οι επιφάνειες (και γενικότερα οι πολλαπλότητες), αποτελούν αυτόματα τοπολογικούς χώρους διότι εξ' ορισμού είναι τοπικά ομοιομορφικές με τον τοπολογικό χώρο $\mathbb{R}^2$ (γενικότερα με τον $\mathbb{R}^n$ για πολλαπλότητες μεγαλύτερης διάστασης, όπου τόσο το $\mathbb{R}^2$ όσο και γενικότερα το $\mathbb{R}^n$ θεωρούνται εφοδιασμένα με την συνήθη τοπολογία).

Ορισμός 7. Θα λέμε ότι η επιφάνεια X είναι *εμφυτευμένη στον* $\mathbb{R}^3$ εάν η X είναι ομοιομορφική με κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Εάν η εμφύτευση δεν μπορεί να γίνει συνολικά (globally) αλλά μόνον τοπικά (locally), τότε θα λέμε ότι η επιφάνεια είναι *εμβαπτισμένη* στον $\mathbb{R}^3$.

Όλες οι επιφάνειες εμβαπτίζονται στον $\mathbb{R}^3$ αλλά δεν εμφυτεύονται όλες στον $\mathbb{R}^3$. Ίσως τα πιο γνωστά παραδείγματα επιφανειών που δεν μπορούν να εμφυτευθούν στον $\mathbb{R}^3$ είναι η επιφάνεια Boy που είδαμε (το πραγματικό προβολικό επίπεδο) καθώς και η φιάλη Klein. Το πρόβλημα συνήθως οφείλεται στο ότι αν επιχειρήσουμε να *συναρμολογήσουμε* τους τοπικούς ομοιομορφισμούς για να πάρουμε μια απεικόνιση που να είναι συνολικά ομοιομορφισμός, η απεικόνιση αυτή *αποτυγχάνει να είναι συνολικά 1-1*, για παράδειγμα στην επιφάνεια Boy υπάρχει ένα λεγόμενο *τριπλό σημείο* που καταστρέφει την συνολική κατασκευή (αλλά ταυτόχρονα κάνει την μελέτη της τοπολογίας των επιφανειών πολύ πιο ενδιαφέρουσα)!

Τέλος σημειώνουμε πως υπάρχει και άλλος ισοδύναμος ορισμός για την εμφύτευση και την εμβάπτιση πολλαπλοτήτων αλλά απαιτεί προχωρημένες γνώσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων που ξεπερνούν τον σκοπό του εν λόγω μαθήματος (χρήση εφαπτόμενων δεσμών και εφαπτόμενων χώρων πολλαπλοτήτων). Για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη παραπέμπουμε σε ένα καλό βιβλίο διαφορικής γεωμετρίας, (για παράδειγμα το βιβλίο των Kobayashi, Nomizu).

Αναφορές

[1] Samuel, P. : *Projective Geometry*, Springer (1988) (εξαιρετικό βιβλίο).

[2] Coxeter, H.S.M. : *Projective Geometry*, Springer (2003).

[3] Hartshorne, R. : *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, (2000).

[4] Veblen, O. and Young, J.W.A. : *Projective Geometry*.

[5] Ayres, F. : *Problems on Projective Geometry*, Schaum's Outline Series, (1976) .