ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Ιωάννης Π. Ζώης
E-mail: `i.zois@exeter.oxon.org`

12 Αυγούστου 2008

Περιεχόμενα

1 Πρόλογος **7**

2 Πολλαπλότητες **9**
2.1 Χάρτες Συντεταγμένων 9
2.2 Ο Ορισμός της Πολλαπλότητας 12
2.3 Επιπλέον Παραδείγματα Πολλαπλοτήτων 14
2.4 Απεικονίσεις μεταξύ Πολλαπλοτήτων 17

3 Εφαπτόμενα και Συνεφαπτόμενα Διανύσματα **19**
3.1 Η Ύπαρξη Λείων Συναρτήσεων 19
3.2 Η Παράγωγος μιας Συνάρτησης 20
3.3 Παράγωγοι Λείων Απεικονίσεων 25

4 Διανυσματικά Πεδία **28**
4.1 Η Εφαπτόμενη Δέσμη 28
4.2 Τα Διανυσματικά Πεδία ως Παράγωγοι 31
4.3 Μονοπαραμετρικές Ομάδες Διαφορομορφισμών 33
4.4 Ο Μεταθέτης Lie αναθεωρείται 38

5 Τανυστικά Γινόμενα **39**
5.1 Η Εξωτερική Άλγεβρα 41

6 Διαφορικές Μορφές **46**
6.1 Η Δέσμη των p-μορφών 46
6.2 Διαμερίσεις της Μονάδας 47
6.3 Η Χρήση Διαφορικών Μορφών στην Πράξη 49
6.4 Η Εξωτερική Παράγωγος 52
6.5 Η Παράγωγος Lie των Διαφορικών Μορφών 57
6.6 Συνομολογία de Rham 60

7 Ολοκλήρωση Διαφορικών Μορφών **66**
7.1 Προσανατολισμός 66
7.2 Το Θεώρημα Stokes και το Θεώρημα Brouwer 70

8 Ο Βαθμός μιας Λείας Απεικόνισης **77**
8.1 Η Συνομολογία de Rham στην Κορυφαία Διάσταση 77

9 Μετρικές Ρήμαν **86**
9.1 Ο Μετρικός Τανυστής 86
9.2 Η Ροή των Γεωδαισιακών 89

9.3 Αρμονικές Διαφορικές Μορφές 96

10 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Βοηθητικά Αποτελέσματα 103

10.1 Το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης 103
10.2 Ύπαρξη Λύσεων σε Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 105
10.3 Λεία Εξάρτηση 107
10.4 Διαμερίσεις της Μονάδας σε Τυχαίες Πολλαπλότητες 110
10.5 Το Θεώρημα Sard (Ειδική περίπτωση) 112

Σύντομο βιογραφικό σημείωμα του συγγραφέα:

Ο Ιωάννης Παναγιώτου Ζώης γεννήθηκε το 1968 στη Βέροια. Μετά το πέρας των προπτυχιακών του σπουδών στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, απ΄ όπου αποφοίτησε με Άριστα, συνέχισε τις μεταπτυχιακές του σπουδές στην Αγγλία: Μάστερ (Part III of the Mathematical Tripos) στο Πανεπιστήμιο του Κέιμπριτζ (Κολλέγιο Εμμανουήλ) και Διδακτορικό στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης (Κολλέγιο Έξετερ). Η τριμελής επιτροπή της διδακτορικής του διατριβής απαρτιζόταν από τους καθηγητές Simon K. Donaldson FRS (Fields Medal 1986, Crafoord Prize 1996), Roger Penrose FRS, OM και Sheung-Tsoun Tsou. Ήταν υπότροφος, μεταξύ άλλων, της Ευρωπαϊκής Ένωσης, της Βρεττανικής Κυβέρνησης, του ΙΚΥ (Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών), του Κοινωφελούς Ιδρύματος *Α.Σ. Ωνάσης* και του Κοινωφελούς Ιδρύματος *Α.Γ. Λεβέντης*. Έχει εργασθεί στο παρελθόν ως ερευνητής και πανεπιστημιακός δάσκαλος στα Πανεπιστήμια της Οξφόρδης και του Κέιμπριτζ της Αγγλίας, στο Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) (ως μέλος της ερευνητικής ομάδας του καθηγητή Alain Connes–Fields Medal 1982, Crafoord Prize 2002–) και στην École Normale Superieure (ENS) στο Παρίσι της Γαλλίας και αλλού. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εμπίπτουν στα γνωστικά αντικείμενα της Μη-μεταθετικής Γεωμετρίας, της Τοπολογίας και Γεωμετρίας των Πολλαπλοτήτων (ειδικότερα των Πολλαπλοτήτων Χαμηλών Διαστάσεων) και εφαρμογές αυτών στη Θεωρητική Φυσική (Κοσμολογία, Θεωρίες Ενοποίησης, Θεωρία Χορδών/Μεμβρανών). Έχει δημοσιεύσει μέχρι στιγμής περίπου είκοσι άρθρα σε διεθνή ερευνητικά επιστημονικά περιοδικά (σε ηλεκτρονική και έντυπη μορφή).

Εισαγωγή:

Από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων μέχρι σήμερα, οι βασικοί τομείς των μαθηματικών ήταν και είναι η *γεωμετρία* και η *θεωρία αριθμών*. Επειδή στα μαθηματικά (όπως και στην φυσική) έχουν επικρατήσει Πλατωνικές απόψεις, το μεγάλο όνειρο των μαθηματικών είναι κάποια στιγμή να ενοποιηθούν αυτοί οι δύο κλάδοι των μαθηματικών μέσω του γνωστού πρόγραμματος Atiyah-Langlands. Κάποια επιτυχημένα βήματα προς αυτή την κατεύθυνση έχουν ήδη γίνει (βλέπε για παράδειγμα τις πρόσφατες εργασίες του Laurent Lafforgue) αλλά η γενική αίσθηση είναι πως χρειάζεται να διανύσουμε πολύ δρόμο ακόμη.

Η σύγχρονη γεωμετρία με τη σειρά της χωρίζεται σε δύο μεγάλους κλάδους: την αλγεβρική γεωμετρία και την διαφορική γεωμετρία. Το βασικό αντικείμενο μελέτης της πρώτης είναι οι ποικιλίες (ή γενικότερα τα σχήματα) και χρησιμοποιεί αλγεβρικές εξισώσεις. Το βασικό αντικείμενο μελέτης της δεύτερης είναι οι πολλαπλότητες, χώροι που τοπικά (αλλά όχι κατάνάγκη ολικά) μοιάζουν με τους γνωστούς Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν τρία είδη (κατηγορίες στην επίσημη μαθηματική γλώσσα) πολλαπλοτήτων: τοπολογικές, κατά τμήματα συνεχείς και διαφορίσιμες. Είναι ένα από τα μεγάλα μυστήρια που φωτίστηκε κάπως με την πρόσφατη εμπνευσμένη ερευνητική δουλειά του μεγαλύτερου ίσως γεωμέτρη της εποχής μας Simon K. Donaldson το γεγονός ότι οι τρεις κατηγορίες αυτές παρουσιάζουν την μέγιστη διαφοροποίηση μεταξύ τους στην διάσταση 4, κάτι που οδηγεί στην ύπαρξη των λεγόμενων εξωτικών δομών, χαρακτηριστικό που συναντάται αποκλειστικά και μόνο στην διάσταση αυτή. Ίσως δεν είναι τυχαίο πως σύμφωνα με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας αυτή είναι και η διάσταση (τουλάχιστον μακροσκοπικά) του σύμπαντος μέσα στο οποίο ζούμε (τρεις χωρικές διαστάσεις συν ο χρόνος).

Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με διαφορίσιμες πολλαπλότητες και στη μελέτη αυτών σημαντικό ρόλο παίζουν, όπως θα ανέμενε κανείς, οι διαφορικές εξισώσεις. Επειδή οι πολλαπλότητες αποτελούν χώρους που τοπικά μοιάζουν με τους Ευκλείδειους χώρους, θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η μελέτη των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων αποτελεί μια μεγάλη γενίκευση της διανυσματικής ανάλυσης. Σημειώνουμε ότι τα τελευταία είκοσι χρόνια έκανε την εμφάνισή της και μια τρίτη γεωμετρία, η λεγόμενη μη-μεταθετική γεωμετρία που κατά κάποιν τρόπο συνεννώνει ιδέες από την αλγεβρική και την διαφορική γεωμετρία.

Οι διδακτικές αυτές σημειώσεις βασίστηκαν στο μάθημα του 7ου τριμήνου (τρίτο έτος) *Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες* το οποίο ο συγγραφέας είχε διδάξει στο παρελθόν στους προπτυχιακούς φοιτητές των Μαθηματικών Τμημάτων των Πανεπιστημίων της Οξφόρδης και του Κέιμπριτζ της Αγγλίας. (Σημειώνουμε

πως στην πιο έγκυρη πρόσφατη διεθνή λίστα με τα 200 κορυφαία πανεπιστήμια του κόσμου των εφημερίδων Times Λονδίνου και Ν. Υόρκης καθώς και του περιοδικού Time, τα εν λόγω πανεπιστήμια βρίσκονται στις θέσεις 1 και 2 στην επί μέρους κατάταξη που αφορά τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες).

Το πρωτογενές υλικό των σημειώσεων αυτών (και της ύλης κατ΄ επέκταση) προέρχεται κυρίως από τις εξαιρετικές σημειώσεις του καθηγητή Nigel J. Hitchin FRS, σήμερα στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης αλλά παλαιότερα στο Πανεπιστήμιο του Κέιμπριτζ της Αγγλίας. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν και διάφορες προσωπικές σημειώσεις του συγγραφέα από τις παραδόσεις του καθηγητή Simon K. Donaldson FRS, την περίοδο που βρισκόταν στην Οξφόρδη (σήμερα στο Imperial College του Πανεπιστημίου του Λονδίνου).

Πέρα από τη μετάφραση των σημειώσεων στα ελληνικά έγινε και μια προσπάθεια να αναλυθούν περισσότερο πολλά σημεία αλλά και να εμπλουτισθούν με κάποιες επιπλέον εφαρμογές. Ταυτόχρονα συμπεριελήφθησαν και αρκετοί ορισμοί από άλλους κλάδους των μαθηματικών (κυρίως από την Άλγεβρα αλλά και από την Τοπολογία, τη Γεωμετρία κ.ά.) ώστε να γίνουν οι σημειώσεις αυτές κατά το δυνατό αυτοδύναμες στην μελέτη τους.

Έχοντας κατά νουν ότι το πιο ενδιαφέρον κομμάτι της σύγχρονης γεωμετρίας είναι ο συσχετισμός τοπικών και ολικών (τοπολογικών) ιδιοτήτων των πολλαπλοτήτων, η πρόθεση του συγγραφέα είναι διττή:

• Να προσφερθεί ένα μάθημα υψηλού προπτυχιακού επιπέδου σύμφωνα με τα διεθνή πρότυπα αλλά ταυτόχρονα η ύλη να είναι προσιτή και σε ένα ακροατήριο με τεχνολογική κατεύθυνση.

• Να καλυφθεί ένα κενό στην ελληνική βιβλιογραφία η οποία ασχολείται σχεδόν αποκλειστικά με την Ρημάνεια (μετρική) Γεωμετρία των πολλαπλοτήτων.

Εκφράζονται θερμές ευχαριστίες κυρίως προς τους καθηγητές Simon K. Donaldson και Nigel J. Hitchin για τη σημαντική συμβολή τους στο όλο εγχείρημα.

Αθήνα, Αύγουστος 2008
Ι.Π.Ζ.

1 Πρόλογος

Οι διδακτικές αυτές σημειώσεις αφορούν το κομμάτι της διαφορικής γεωμετρίας που μελετά *διαφορίσιμες πολλαπλότητες*, οι οποίες αποτελούν ανώτερης διάστασης από 2 γενικεύσεις των επιφανειών (οι επιφάνειες δηλαδή αποτελούν πολλαπλότητες διάστασης 2).

Ιστορικά, μια από τις αιτίες για την μελέτη των πολλαπλοτήτων στάθηκε η *Γενική Θεωρία της Σχετικότητας* (ΓΘΣ) του Albert Einstein (1915) όπου ο τετραδιάστατος χωρόχρονος, βασικά λόγω της *αρχής της ισοδυναμίας*, αποτελεί (πραγματική διαφορίσιμη) πολλαπλότητα διάστασης 4 αλλά και διάφορες έννοιες που εμφανίστηκαν στην κοσμολογία αργότερα όπως οι *σκουληκότρυπες* (wormholes) αλλά και η μελέτη των δυναμικών συστημάτων, η αναλυτική μηχανική των Lagrange, Hamilton όπου μελετάμε συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας κλπ.

Επειδή όπως γνωρίζουμε σήμερα από την ΓΘΣ (αγνοώντας θεωρίες υπερχορδών, Μ-Θεωρία, συστροφική γεωμετρία κλπ που δεν είναι πειραματικά επιβεβαιωμένες), το σύμπαν (τετραδιάστατος χωρόχρονος) απλά υπάρχει και δεν βρίσκεται μέσα σε κάποιον μεγαλύτερης διάστασης Ευκλείδειο χώρο, οι πολλαπλότητες θα ήταν καλύτερα να θεωρούνται ως αυτόνομα γεωμετρικά αντικείμενα και όχι ως αντικείμενα εμφυτευμένα σε κάποιον, ικανής διάστασης, Ευκλείδειο χώρο. Το βασικό μέλημα λοιπόν είναι να αναπτύξουμε μια μαθηματική θεωρία που θα μας επιτρέπει να κάνουμε *ανάλυση* πάνω σε πολλαπλότητες, δηλαδή σε χώρους που δεν είναι αναγκαστικά Ευκλείδειοι χώροι.

Η πρώτη ιδέα που θα συναντήσουμε είναι η ιδιότητα που ουσιαστικά ορίζει μια πραγματική πολλαπλότητα διάστασης n, δηλαδή η ικανότητα να περιγράφουμε *τοπικά* τα σημεία μιας πολλαπλότητας χρησιμοποιώντας n πραγματικούς αριθμούς που λέγονται *τοπικές συντεταγμένες*. Στη συνέχεια θα χρειαστεί να ορίσουμε αναλυτικά αντικείμενα (*διανυσματικά πεδία* και *διαφορικές μορφές* για παράδειγμα) που είναι ανεξάρτητα από την επιλογή συντεταγμένων. Αυτό έχει δύο πλεονεκτήματα: απο την μια μας επιτρέπει να περιγράφουμε αυτά τα αντικείμενα σε τοπολογικά μη-τετριμμένες πολλαπλότητες όπως οι σφαίρες και ταυτόχρονα μας επιτρέπει να εκφράζουμε τις εξισώσεις της θεωρητικής φυσικής χωρίς τη χρήση συντεταγμένων, κάτι που απαιτείται από την *αρχή του συναλλοιώτου* της ΓΘΣ.

Το βασικό παράδειγμα αναλυτικών μεθόδων σε μια πολλαπλότητα αποτελεί η θεωρία των διαφορικών μορφών και η εξωτερική παράγωγος. Αυτό γενικεύει τη βαθμίδα, την απόκλιση και τον στροβιλισμό της διανυσματικής ανάλυσης,

τα Θεωρήματα των Green, Stokes και ταυτόχρονα οδηγεί στην *συνομολογία de Rham* που αποτελεί μια πολύ χρήσιμη αναλυτική προσέγγιση της αλγεβρικής τοπολογίας μιας πολλαπλότητας. Η συνομολογία de Rham έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμη στις μέρες μας τόσο στην αλγεβρική γεωμετρία αλλά και στην θεωρητική φυσική ακριβώς επειδή αποτελεί το βασικό εργαλείο που συσχετίζει τοπικές και ολικές (τοπολογικές) ιδιότητες μιας πολλαπλότητας.

Μια πιο λεπτομερή μελέτη των πολλαπλοτήτων απαιτεί περισσότερα δεδομένα και έτσι θα ορίσουμε και θα περιγράψουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των μετρικών Ρήμαν οι οποίες γενικεύουν την πρώτη θεμελιώδη μορφή μιας επιφάνειας και με υπογραφή Minkowski αποτελούν την ουσία των εξισώσεων πεδίου του Einstein στην ΓΘΣ που περιγράφουν το βαρυτικό πεδίο. Επειδή οι συγκεκριμένες σημειώσεις αφορούν ένα εισαγωγικό μάθημα διάρκειας ενός εξαμήνου η μελέτη μας αναγκαστικά θα περιοριστεί στην μελέτη γεωδαισιακών διανυσματικών πεδίων, την ροή των γεωδαισιακών στην συνεφαπτόμενη δέσμη της πολλαπλότητας και στη μελέτη των βασικών ιδιοτήτων των αρμονικών μορφών (θεωρία Hodge). Τέλος στο Παράρτημα συγκεντρώσαμε κάποια τεχνικά αποτελέσματα τοπικού χαρακτήρα κυρίως από την ανάλυση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών για να μην διακοπεί η ανάπτυξη της σχετικής θεωρίας.

Οι σημειώσεις συνοδεύονται από μια καλή σειρά ασκήσεων.

2 Πολλαπλότητες

2.1 Χάρτες Συντεταγμένων

Η έννοια της πολλαπλότητας είναι κάπως πολύπλοκη αλλά ξεκινάμε με τον ορισμό ενός χάρτη συντεταγμένων:

Ορισμός 1. Ένας *χάρτης συντεταγμένων* σε ένα σύνολο X αποτελείται από ένα υποσύνολο $U \subseteq X$ μαζί με μια αμφεικόνιση (απεικόνιση $1-1$ και επί)

$$\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

επί ενός ανοικτού υποσυνόλου $\phi(U)$ του $\mathbb{R}^n$ (το $\mathbb{R}^n$ υποθέτουμε πως είναι εφοδιασμένο με την συνήθη τοπολογία).

Συνεπώς μπορούμε να παραμετροποιούμε τα σημεία $x \in U$ χρησιμοποιώντας n συντεταγμένες $\phi(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Στη συνέχεια θέλουμε να εξετάσουμε την περίπτωση που το X καλύπτεται από τέτοιους χάρτες και ταυτόχρονα ικανοποιούνται κάποιες συνθήκες συνέπειας:

Ορισμός 2. Ένας *άτλαντας διάστασης* n στο X αποτελείται από μια συλλογή χαρτών συντεταγμένων $\{U_a, \phi_a\}_{a \in I}$ που ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

- το X καλύπτεται από την συλλογή $\{U_a\}_{a \in I}$
- για κάθε $a, b \in I$ το $\phi_a(U_a \cap U_b)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$
- η απεικόνιση

$$\phi_b \phi_a^{-1} : \phi_a(U_a \cap U_b) \to \phi_b(U_a \cap U_b)$$

είναι μια λεία απεικόνιση με λεία αντίστροφη απεικόνιση.

Υπενθυμίζουμε ότι μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *λεία (ή άπειρης κλάσης,* $\mathbf{F} \in C^\infty$) εάν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι οποιασδήποτε τάξης. Σημειώνουμε πως θα μπορούσαμε να αναπτύξουμε την θεωρία των πολλαπλοτήτων θεωρώντας μικρότερη διαφορισιμότητα.

Παραδείγματα:

1. Έστω $X = \mathbb{R}^n$ και θεωρούμε $U = X$ με $\phi = id$. Θα μπορούσαμε επίσης να επιλέξουμε το X να είναι οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

2. Έστω X το σύνολο των ευθειών στο επίπεδο. Η καθεμιά περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής $Ax + By + C = 0$ όπου εάν πολλαπλασιάσουμε τους συντελεστές A, B, C επί έναν μη-μηδενικό πραγματικό αριθμό αποκτάμε την ίδια ευθεία. Έστω U_0 το σύνολο των μη-κάθετων ευθειών του επιπέδου. Για κάθε ευθεία $l_0 \in U_0$ έχουμε την εξίσωση $y = mx + c$ όπου τα m, c καθορίζονται μονοσήμαντα. Έτσι η $\phi_0(l) = (m, c)$ ορίζει έναν χάρτη συντεταγμένων $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^2$. Με παρόμοιο τρόπο εάν το U_1 περιέχει τις μη-οριζόντιες ευθείες του επιπέδου με εξίσωση $x = \tilde{m}y + \tilde{c}$ αποκτάμε έναν άλλο χάρτη $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$.

Τώρα έστω $U_0 \cap U_1$ το σύνολο των ευθειών $y = mx + c$ του επιπέδου που δεν είναι οριζόντιες, οπότε $m \neq 0$. Τότε

$$\phi_0(U_0 \cap U_1) = \{(m, c) \in \mathbb{R}^2 : m \neq 0\}$$

που είναι ανοικτό. Επιπλέον η $y = mx + c$ δίδει $x = y/m - c/m$, οπότε

$$\phi_1\phi_0^{-1}(m, c) = (1/m, -c/m)$$

που είναι λεία με λεία αντίστροφη. Συνεπώς ορίσαμε έναν άτλαντα στον χώρο των ευθειών του επιπέδου.

3. Θεωρύμε το $\mathbb{R}$ ως προσθετική ομάδα και έστω $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ η υποομάδα των ακεραίων. Έστω X η ομάδα πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ο αντίστοιχος ομομορφισμός πηλίκο.

Θέτουμε $U_0 = p(0, 1)$ και $U_1 = p(-1/2, 1/2)$. Αφού οποιαδήποτε δύο στοιχεία του υποσυνόλου $p^{-1}(a)$ διαφέρουν κατά έναν ακέραιο, η p περιορισμένη στο $(0, 1)$ ή στο $(-1/2, 1/2)$ είναι 1-1 οπότε έχουμε χάρτες συντεταγμένων

$$\phi_0 = p^{-1} : U_0 \to (0, 1)$$

και

$$\phi_1 = p^{-1} : U_1 \to (-1/2, 1/2).$$

Φανερά τα U_0 και U_1 καλύπτουν το $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ αφού ο ακέραιος $0 \in U_1$.

Ελέγχουμε:

$$\phi_0(U_0 \cap U_1) = (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$$

και

$$\phi_1(U_0 \cap U_1) = (-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$$

που είναι ανοικτά. Τελικά εάν $x \in (0, 1/2)$, τότε $\phi_1\phi_0^{-1}(x) = x$ και εάν $x \in (1/2, 1)$ τότε $\phi_1\phi_0^{-1}(x) = x - 1$. Αυτές οι απεικονίσεις είναι λείες με λείες αντίστροφες οπότε ορίζουν έναν άτλαντα στο $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

4. Έστω $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ το εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Έστω $U_0 = \mathbb{C}$ με $\phi_0(z) = z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Παίρνουμε

$$U_1 = \mathbb{C} - \{0\} \cup \{\infty\}$$

και ορίζουμε $\phi_1(\tilde{z}) = \tilde{z}^{-1} \in \mathbb{C}$ εάν $\tilde{z} \neq \infty$ και $\phi_1(\infty) = 0$. Τότε

$$\phi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C} - \{0\}$$

που είναι ανοικτό και

$$\phi_1\phi_0^{-1}(z) = z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Αυτή είναι μια λεία αντιστρέψιμη συνάρτηση των (x, y) οπότε ορίζεται ένας άτλαντας διάστασης 2 στο X, το εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο.

5. Έστω $X = P(\mathbb{R}^{n+1})$ ο πραγματικός προβολικός χώρος διάστασης n (δηλαδή ο χώρος των μονοδιάστατων διανυσματικών υποχώρων του $\mathbb{R}^{n+1}$). Κάθε υπόχωρος παράγεται από ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ και ορίζουμε το $U_i \subset P(\mathbb{R}^{n+1})$ να είναι το σύνολο των διανυσμάτων $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ των οποίων η i συνιστώσα είναι μη-μηδενική. Φανερά το X καλύπτεται από την ένωση των U_i $(i = 1, 2, ..., n + 1)$. Στο U_i μπορούμε να επιλέξουμε μονοσήμαντα το v έτσι ώστε η i συνιστώσα του να είναι 1 οπότε το U_i βρίσκεται σε αντιστοιχία 1-1 με το υπερεπίπεδο $x_i = 1$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ που είναι ένα αντίγραφο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζεται συνεπώς ένας χάρτης συντεταγμένων

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n.$$

Το σύνολο $\phi_i(U_i \cap U_j)$ αποτελεί το υποσύνολο για το οποίο $x_j \neq 0$ οπότε είναι ανοικτό. Επιπλέον

$$\phi_i\phi_j^{-1} : \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_j = 1, x_i \neq 0\} \to \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = 1, x_j \neq 0\}$$

είναι η απεικόνιση

$$v \mapsto \frac{1}{x_i}v$$

που είναι λεία με λεία αντίστροφη, οπότε ορίζεται ένας άτλαντας διάστασης n στον $X = P(\mathbb{R}^{n+1})$.

2.2 Ο Ορισμός της Πολλαπλότητας

Όλα τα προηγούμενα παραδείγματα αποτελούν στην πραγματικότητα πολλαπλότητες διότι η ύπαρξη ενός άτλαντα επαρκεί για να υποδηλώσει αυτό το γεγονός. Υπάρχει μόνο μια λεπτομέρεια στον αυστηρό ορισμό μιας πολλαπλότητας που θα πρέπει επιπροσθέτως να λάβουμε υπόψη μας και αυτή είναι η ύπαρξη πολλών επιλογών για τον καθορισμό ενός άτλαντα. Εάν είχαμε χρησιμοποιήσει μια διαφορετική βάση του $\mathbb{R}^2$, οι χάρτες στον χώρο X των ευθειών του επιπέδου θα ήταν διαφορετικοί αλλά θέλουμε να θεωρούμε τον χώρο X ως μια μαθηματική οντότητα ανεξάρτητη από την επιλογή ενός άτλαντα. Για τον λόγο αυτό δίδουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 3. Δύο άτλαντες (διάστασης n) $\{U_a, \phi_a\}_{a\in J}$ και $\{V_i, \psi_i\}_{i\in I}$ λέγονται *συμβατοί* εάν η ένωσή τους αποτελεί νέο άτλαντα.

Το νόημα αυτού του ορισμού είναι πως οι επιπλέον απεικονίσεις $\psi_i\phi_a^{-1}$ πρέπει να είναι λείες. Η έννοια της συμβατότητας φανερά αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας οπότε στη συνέχεια λέμε ότι:

Ορισμός 4. Μια *διαφορίσιμη δομή* στον X είναι μια κλάση ισοδυναμίας από άτλαντες.

Τελικά παραθέτουμε τον ορισμό της πολλαπλότητας:

Ορισμός 5. Μια *(πραγματική) διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης* n είναι ένας χώρος X εφοδιασμένος με μια διαφορίσιμη δομή.

Το μήνυμα είναι τούτο και είναι καθαρό: Για να αποδείξουμε ότι ένας χώρος αποτελεί πολλαπλότητα, αυτό που απαιτείται είναι να ορίσουμε έναν άτλαντα. Ο ορισμός της πολλαπλότητας στη συνέχεια λαμβάνει υπόψη του την ύπαρξη μιας πληθόρας από άτλαντες.

Πολλά βιβλία δίδουν έναν κάπως διαφορετικό ορισμό, αρχίζουν με έναν τοπολογικό χώρο X και επιβάλουν την συνθήκη ότι οι χάρτες συντεταγμένων αποτελούν ομοιομορφισμούς. Αυτό είναι αποδεκτό εάν θεωρεί κάποιος ότι ο μαθηματικός κόσμος αποτελείται από μια ιεραρχία από όλο και πιο πολύπλοκες δομές αλλά εμπεριέχει το μειονέκτημα ότι για να αποδείξει κανείς ότι ένα σύνολο αποτελεί πολλαπλότητα θα πρέπει πρώτα να ορισθεί μια τοπολογία. Θα δούμε αμέσως ότι ένας άτλαντας ορίζει αυτόματα μια τοπολογία.

Πρώτα ας υπενθυμίσουμε τον ορισμό ενός τοπολογικού χώρου: ένας τοπο-

λογικός χώρος αποτελείται από ένα σύνολο X μαζί με μια διακεκριμένη κλάση υποσυνόλων του V που λέγονται *ανοικτά (υπο)σύνολα* και τα οποία ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

1. το κενό σύνολο $\emptyset$ και το ίδιο το X είναι ανοικτά

2. η ένωση οποιουδήποτε πλήθους ανοικτών είναι ανοικτό

3. η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών είναι ανοικτό.

Τώρα υποθέτουμε πως το M αποτελεί πολλαπλότητα. Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο $V \subseteq M$ είναι ανοικτό εάν για κάθε $a \in I$, το $\phi_a(V \cap U_a)$ αποτελεί ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$ (εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία). Είναι άμεσα φανερό ότι το $V = U_b$ είναι ανοικτό (από τον Ορισμό 2).

Θα πρέπει να ελέγξουμε ότι ορίζεται μια τοπολογία. Η συνθήκη 1 ικανοποιείται διότι $\phi_a(\emptyset) = \emptyset$ και $\phi_a(M \cap U_a) = \phi_a(U_a)$ το οποίο επίσης είναι ανοικτό από τον Ορισμό 1. Για τις άλλες δύο, εάν το V_i είναι μια συλογή ανοικτών, τότε επειδή η ϕ_a αποτελεί αμφεικόνιση θα έχουμε

$$\phi_a((\cup V_i) \cap U_a) = \cup \phi_a(V_i \cap U_a)$$

και

$$\phi_a((\cap V_i) \cap U_a) = \cap \phi_a(V_i \cap U_a)$$

και το δεξί μέλος αποτελείται από ένωση ή τομή ανοικτών. Κάπως λιγότερο προφανής είναι η παρακάτω:

Πρόταση 2.1 Με την παραπάνω τοπολογία, η απεικόνιση $\phi_a : U_a \to \phi_a(U_a)$ αποτελεί ομοιομορφισμό.

Απόδειξη: Εάν το $V \subseteq U_a$ είναι ανοικτό, τότε το $\phi_a(V) = \phi_a(V \cap U_a)$ είναι επίσης ανοικτό εξ ορισμού της τοπολογίας οπότε η ϕ_a^{-1} είναι σίγουρα συνεχής.

Τώρα έστω $W \subset \phi_a(U_a)$ ανοικτό, τότε $\phi_a^{-1}(W) \subseteq U_a$ και το U_a είναι ανοικτό στην M οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι και το $\phi_a^{-1}(W)$ είναι ανοικτό στην M. Όμως

$$\phi_b(\phi_a^{-1}(W) \cap U_b) = \phi_b \phi_a^{-1}(W \cap \phi_a(U_a \cap U_b)).$$

Από τον Ορισμό 2 το σύνολο $\phi_a(U_a \cap U_b)$ είναι ανοικτό οπότε η τομή του με το ανοικτό W είναι επίσης ανοικτό. Τώρα η $\phi_b \phi_a^{-1}$ είναι λεία με λεία αντίστροφη

και άρα είναι σίγουρα ομοιομορφισμός οπότε το δεξί μέλος $\phi_b\phi_a^{-1}(W \cap \phi_a(U_a \cap U_b))$ είναι ανοικτό. Συνεπώς και το αριστερό μέλος $\phi_b(\phi_a^{-1}(W) \cap U_b)$ είναι ανοικτό και από τον ορισμό της τοπολογίας αυτό σημαίνει ότι το $\phi_a^{-1}(W)$ είναι ανοικτό, δηλαδή η ϕ_a είναι συνεχής. $\square$

Για να είμαστε σε θέση να εξελίξουμε περεταίρω σε κάποιο λογικό βαθμό την θεωρία, θα πρέπει να κάνουμε δύο επιπλέον υποθέσεις για την συγκεκριμένη τοπολογία οι οποίες θα ισχύουν σε ολόκληρο το υπόλοιπο αυτών των σημειώσεων:

- *η τοπολογία των πολλαπλοτήτων είναι Hausdorff*

- *η τοπολογία των πολλαπλοτήτων επιτρέπει την ύπαρξη μιας αριθμήσιμης βάσης ανοικτών συνόλων.*

Χωρίς αυτές τις δύο υποθέσεις οι πολλαπλότητες δεν είναι σίγουρα ούτε καν μετρικοί χώροι οπότε δεν είναι δυνατόν να γίνει ανάλυση σε λογικό βαθμό σε αυτές. (Σημειώνουμε παρά ταύτα ότι στα πλαίσια μιας γενικότερης νέας θεωρίας, την *μη-μεταθετική γεωμετρία*, που δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης εδώ, μπορεί να γίνει αρκετά ικανοποιητικά ανάλυση σε χώρους που δεν είναι Hausdorff, όπως για παράδειγμα ο χώρος πηλίκο φυλλωδών δομών σε πολλαπλότητες).

2.3 Επιπλέον Παραδείγματα Πολλαπλοτήτων

Χρειαζόμαστε καλύτερες μεθόδους για να αναγνωρίζουμε τις πολλαπλότητες από το να πασχίζουμε να βρούμε συγκεκριμένους χάρτες συντεταγμένων. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η σφαίρα σε δύο διαστάσεις S^2 η οποία αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης 2 και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την στερεογραφική προβολή λόγου χάριν για να πάρουμε έναν άτλαντα και να δούμε πως πράγματι η S^2 αποτελεί πολλαπλότητα. Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι, παραθέτουμε έναν:

Θεώρημα 2.2 Έστω $F : U \to \mathbb{R}^m$ μια λεία απεικόνιση με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$. Επιλέγουμε ένα σημείο $c \in \mathbb{R}^m$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $a \in F^{-1}(c)$ η παράγωγος

$$DF_a : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$$

είναι επί. Τότε το $F^{-1}(c)$ έχει την δομή μιας πολλαπλότητας διάστασης n που είναι Hausdorff και έχει μια αριθμήσιμη βάση ανοικτών συνόλων.

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε (Θεώρημα Taylor) πως η παράγωγος της F στο σημείο a είναι μια γραμμική απεικόνιση $DF_a : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$F(a+h) = F(a) + DF_a(h) + R(a,h),$$

όπου $R(a,h)/||h|| \to 0$ όταν $h \to 0$.

Εάν γράψουμε $F(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) = (F_1, F_2, ..., F_m)$, η παράγωγος είναι ο Ιακωβιανός πίνακας

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n+m.$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι η F είναι επί, οπότε ο πίνακας έχει τάξη m. Συνεπώς αναδιατάσσοντας τις συντεταγμένες $x_1, x_2, ..., x_{n+m}$ μπορούμε να υποθέσουμε πως ο τετραγωνικός πίνακας

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a), 1 \leq i, j \leq m$$

είναι αντιστρέψιμος. Στη συνέχεια ορίζουμε

$$G : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$$

ως εξής:

$$G(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) = (F_1, F_2, ..., F_m, x_{m+1}, ..., x_{m+n}).$$

Τότε η DG_a είναι αντιστρέψιμη.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το *Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης* (βλέπε Παράρτημα) στην G και παίρνουμε το εξής: υπάρχει μια γειτονιά V του x και μια γειτονιά W του $G(x)$ τέτοιες ώστε η $G : V \to W$ να είναι αντιστρέψιμη με λεία αντίστροφη. Επιπλέον η εξίσωση ορισμού της G παραπάνω δείχνει πως η G απεικονίζει το $V \cap F^{-1}(c)$ στην τομή του W με το αντίγραφο του $\mathbb{R}^n$ που δίδεται από τη σχέση $\{x \in \mathbb{R}^{n+m} : x_i = c_i, 1 \leq i \leq m\}$. Αυτή ορίζει έναν χάρτη συντεταγμένων ϕ.

Εάν πάρουμε δύο τέτοιους χάρτες ϕ_a, ϕ_b, τότε η $\phi_a \phi_b^{-1}$ είναι μια απεικόνιση από ένα ανοικτό (υπο)σύνολο του $\{x \in \mathbb{R}^{n+m} : x_i = c_i, 1 \leq i \leq m\}$ σε ένα άλλο που είναι ο περιορισμός της απεικόνισης $G_a G_b^{-1}$ μεταξύ ενός ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^{n+m}$ στον εαυτό του. Όμως αυτή είναι μια αντιστρέψιμη λεία

απεικόνιση και έτσι ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του ορισμού ενός άτλαντα.

Τελικά, στην επαγώμενη τοπολογία από το $\mathbb{R}^{n+m}$, η G_a είναι ομοιομορφισμός οπότε τα ανοικτά σύνολα της τοπολογίας της πολλαπλότητας ταυτίζονται με τα ανοικτά σύνολα της επαγώμενης τοπολογίας. Αφού ο $\mathbb{R}^{n+m}$ είναι Hausdorff με αριθμήσιμη βάση ανοικτών συνόλων, το ίδιο ισχύει και για το $F^{-1}(c)$. $\square$

Τώρα μπορούμε να δώσουμε μερικά επιπλέον παραδείγματα πολλαπλοτήτων:

Παραδείγματα:

1. Έστω

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

η μοναδιαία σφαίρα διάστασης n. Ορίζουμε την απεικόνιση $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2.$$

Αυτή είναι μια λεία απεικόνιση με παράγωγο

$$DF_a(h) = 2\sum_{i=1}^{n+1} a_i h_i$$

μη-μηδενική (οπότε επί στην περίπτωση που η διάσταση είναι 1) εάν το a δεν μηδενίζεται εκ ταυτότητος. Εάν $F(a) = 1$, τότε

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = 1 \neq 0$$

οπότε $a \neq 0$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2 προκύπτει ότι η σφαίρα είναι πολλαπλότητα.

2. Έστω $O(n)$ ο χώρος των $n \times n$ ορθογώνιων πινάκων: $AA^T = I$, όπου I ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο M_n διάστασης n^2 των πραγματικών $n \times n$ πινάκων και ορίζουμε την συνάρτηση

$$F(A) = AA^T$$

από τον M_n στο χώρο των *συμμετρικών* $n \times n$ πραγματικών πινάκων που επίσης αποτελεί διανυσματικό χώρο διάστασης $n(n+1)/2$. Τότε $O(n) = F^{-1}(I)$.

Παραγωγίζοντας την F παίρνουμε

$$DF_A(H) = HA^T + AH^T$$

και θέτοντας $H = KA$ παίρνουμε

$$KAA^T + AA^TK^T = K + K^T$$

εάν $AA^T = I$, δηλαδή εάν $A \in F^{-1}(I)$. Όμως δοθέντος ενός τυχαίου συμμετρικού πίνακα S, παίρνοντας $K = S/2$ βλέπουμε ότι η παράγωγος DF_I είναι επί, επομένως εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2 βρίσκουμε ότι το $O(n)$ αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης

$$n^2 - n(n+2)/2 = n(n-1)/2.$$

2.4 Απεικονίσεις μεταξύ Πολλαπλοτήτων

Χρειαζόμαστε την έννοια της λείας απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων. Ο Ορισμός είναι ο εξής:

Ορισμός 6. Μια απεικόνιση $F : M \to N$ μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι *λεία* εάν για κάθε σημείο $x \in M$ και χάρτη (U_a, ϕ_a) στην M με $x \in U_a$ και χάρτη (V_i, ψ_i) στην N με $F(x) \in V_i$, η σύνθετη απεικόνιση

$$\psi_i F \phi_a^{-1}$$

με πεδίο ορισμού το $F^{-1}(V_i) \cap U_a$ είναι λεία συνάρτηση.

Σημειώστε ότι αρκεί να ελέγξουμε την παραπάνω συνθήκη για έναν μόνο άτλαντα, οπότε έπεται από το γεγονός ότι η $\phi_a \phi_b^{-1}$ είναι λεία ότι η συνθήκη ικανοποιείται και για κάθε άλλο συμβατό άτλαντα.

Η φυσική έννοια ισοδυναμίας μεταξύ (διαφορίσιμων) πολλαπλοτήτων είναι η εξής:

Ορισμός 7. Ένας *διαφορομορφισμός* $F : M \to N$ μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι μια λεία απεικόνιση με λεία αντίστροφη.

Παράδειγμα: Θεωρούμε δύο από τα προηγούμενα παραδείγματα πολλαπλοτήτων, την ομάδα πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και την σφαίρα S^1 διάστασης 1 (που είναι

φυσικά ο κύκλος). Θα αποδείξουμε πως είναι διαφορομορφικές. Αρχικά ορίζουμε μια απεικόνιση

$$G : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$$

από τη σχέση

$$G(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Φανερά η G είναι αμφεικόνιση (1-1 και επί). Θεωρούμε ένα σημείο $x \in U_0 \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ το οποίο το αναπαριστούμε ως $x \in (0,1)$. Εντός του διαστήματος $(0,1/2)$, έχουμε ότι $\sin 2\pi x \neq 0$, οπότε με την $F = x_1^2 + x_2^2$ έχουμε $\partial F/\partial x_2 \neq 0$. Η χρήση του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης στο Θεώρημα 2.2 λέει ότι η x_1 είναι μια τοπική συντεταγμένη για τον κύκλο S^1 και στην πραγματικότητα σε όλο το διάστημα $(0,1/2)$ η συνάρτηση $\cos 2\pi x$ είναι λεία με λεία αντίστροφη. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με τον έλεγχο για τα άλλα παρόμοια ανοικτά σύνολα.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι μια λεία απεικόνιση είναι συνεχής στην τοπολογία της πολλαπλότητας.

3 Εφαπτόμενα και Συνεφαπτόμενα Διανύσματα

3.1 Η Ύπαρξη Λείων Συναρτήσεων

Ο πιο θεμελιώδης τύπος απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι μια λεία απεικόνιση

$$f : M \to \mathbb{R}.$$

Αυτές τις απεικονίσεις μπορούμε μεταξύ τους να τις προσθέσουμε, να τις πολλαπλασιάσουμε επί πραγματικούς αριθμούς, το αποτέλεσμα παραμένει μια λεία συνάρτηση του ιδίου τύπου, οπότε το σύνολο όλων αυτών συνιστά έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο $C^\infty(M)$ που λέγεται *χώρος των λείων συναρτήσεων της πολλαπλότητας* M. Στην πραγματικότητα μπορούμε και να τις πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους οπότε αποτελούν *μεταθετικό δακτύλιο*. Οι σταθερές συναρτήσεις επίσης ανήκουν στον χώρο των λείων συναρτήσεων οπότε ας δούμε γιατί υπάρχει πληθώρα λείων ολικών (δηλαδή που ορίζονται σε ολόκληρη την πολλαπλότητα) συναρτήσεων. Θα χρησιμοποιήσουμε ανώμαλες συναρτήσεις (bump functions) (λείες συναρτήσεις με συμπαγές υποστήριγμα) και την ιδιότητα Hausdorff.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η παρακάτω συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι λεία
$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & \text{εάν} \quad t > 0, \\ 0, & \text{εάν} \quad t \leq 0. \end{cases}$

Τώρα ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

έτσι ώστε η g να είναι ταυτοτικά 1 όταν $t \geq 1$ και να μηδενίζεται όταν $t < 0$. Στη συνέχεια γράφουμε

$$h(t) = g(t+2)g(2-t).$$

Αυτή η συνάρτηση είναι τελείως επίπεδη στην κορυφή. Τελικά κατασκευάζουμε την έκδοση διάστασης n

$$k(x_1, x_2, ..., x_n) = h(x_1)h(x_2)...h(x_n).$$

Μπορούμε να κλιμακώσουμε το πεδίο ορισμού έτσι ώστε να μηδενίζεται έξω από μια μικρή σφαίρα ακτίνας $2r$ και να είναι ταυτοτικά 1 εντός μιας σφαίρας ακτίνας r.

Αυτή την κατασκευή θα την χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές στη συνέχεια. Επί του παρόντος, έστω M μια πολλαπλότητα και (U, ϕ_U) ένας χάρτης συντεταγμένων. Επιλέγουμε μια συνάρτηση k σαν την παραπάνω της οποίας το υποστήριγμα (υπενθυμίζουμε ότι $supp(f) = \{x : f(x) \neq 0\} \subset \phi_U(U)$) και ορίζουμε

$$f : M \to \mathbb{R}$$

ως

$$f(x) = \begin{cases} k \circ \phi_U(x), & \text{εάν} \quad x \in U, \\ 0, & \text{εάν} \quad x \in M - U. \end{cases}$$

Η παραπάνω είναι λεία συνάρτηση; Η απάντηση είναι ναί: φανερά το υποστήριγμα της f είναι κλειστό και φραγμένο στο $\mathbb{R}^n$, άρα και συμπαγές, και αφού η ϕ_U αποτελεί ομοιομορφισμό, το υποστήριγμα της f είναι συμπαγές. Εάν $y \in M - U$, τότε το y δεν ανήκει στο υποστήριγμα της f και εάν η M είναι Hausdorff μπορούμε να βρούμε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το y που να μην τέμνει το υποστήριγμα της f. Τότε φανερά η f είναι λεία αφού μηδενίζεται σε μια γειτονιά του y.

3.2 Η Παράγωγος μιας Συνάρτησης

Υπάρχουν πολλές λείες συναρτήσεις. Η ερώτηση τώρα είναι η εξής: γνωρίζουμε τι είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, αλλά ποια είναι η παράγωγός της; Θα πρέπει να δώσουμε έναν ορισμό της παραγώγου που να είναι ανεξάρτητος από συντεταγμένες, κάτι που απαιτεί κάποιες καινούριες έννοιες. Η παράγωγος σε ένα σημείο $a \in M$ θα βρίσκεται σε έναν διανυσματικό χώρο T_a^* που λέγεται συνεφαπτόμενος χώρος.

Πρώτα ας απαντήσουμε μια απλούστερη ερώτηση, τι σημαίνει ο μηδενισμός μιας παραγώγου; Αυτό είναι κάτι που δεν εξαρτάται από την επιλογή συντεταγμένων επειδή σε μια συμπαγή πολλαπλότητα κάθε συνάρτηση έχει ένα μέγιστο οπότε σε κάθε σύστημα συντεταγμένων σε μια γειτονιά του συγκεκριμένου σημείου η παράγωγος πρέπει να μηδενίζεται. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε: εάν $f : M \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση, τότε η

$$g = f\phi_a^{-1}$$

είναι μια λεία συνάρτηση των $x_1, x_2, ..., x_n$. Έστω ότι η παράγωγός της μηδενίζεται στο $\phi_U(a)$ και τώρα παίρνουμε έναν διαφορετικό χάρτη ϕ_b με $h = f\phi_b^{-1}$. Τότε

$$g = f\phi_a^{-1} = f\phi_b^{-1}\phi_b\phi_a^{-1}.$$

Αλλά από τον ορισμό του άτλαντα, η $\phi_b\phi_a^{-1}$ είναι λεία με λεία αντίστροφη, οπότε

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = h(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$$

και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial h}{\partial y_j}(y(a))\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(a).$$

Αφού η $y(x)$ είναι αντιστρέψιμη, ο Ιακωβιανός πίνακάς της είναι αντιστρέψιμος οπότε $Dg_a = 0$ εάν και μόνον εάν $Dh_{y(a)} = 0$. Ελέγξαμε λοιπόν ότι ο μηδενισμός της παραγώγου στο σημείο a είναι ανεξάρτητος από τον χάρτη συντεταγμένων. Θέτουμε $Z_a \subset C^\infty(M)$ το υποσύνολο των συναρτήσεων των οποίων η παράγωγος μηδενίζεται στο σημείο a. Αφού η Df_a είναι γραμμική, το υποσύνολο Z_a αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο.

Ορισμός 8. Ο *συνεφαπτόμενος χώρος* T_a^* στο σημείο $a \in M$ είναι ο χώρος πηλίκο

$$T_a^* = C^\infty(M)/Z_a.$$

Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο a είναι η εικόνα της στον παραπάνω χώρο και συμβολίζεται με df_a.

Εδώ απλώς ορίσαμε τον χώρο των παραγώγων ως τον χώρο των λείων συναρτήσεων δια τον χώρο των συναρτήσεων των οποίων η παράγωγος μηδενίζεται, κάτι που αποτελεί σχεδόν ταυτολογία, οπότε για να πάρουμε κάτι χρήσιμο θα πρέπει να αποδείξουμε κάτι χρήσιμο για τον T_a^*. Αρχικά παρατηρούμε ότι εάν η ψ είναι μια λεία συνάρτηση σε μια γειτονιά του x, μπορούμε να την πολλαπλασιάσουμε επί μια ανώμαλη συνάρτηση, να την επεκτείνουμε σε όλη την M και μετά να μελετήσουμε την εικόνα της στο $T_a^* = C^\infty(M)/Z_a$. Όμως η παράγωγός της σε έναν χάρτη συντεταγμένων γύρω από το a είναι ανεξάρτητη από την ανώμαλη συνάρτηση διότι όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι ταυτοτικά ίσες με 1 σε μια γειτονιά του a. Σ Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο στο a λείων συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται μόνο σε μια γειτονιά του a. Συγκεκριμένα θα μπορούσαμε να πάρουμε τις συναρτήσεις συντεταγμένων $x_1, x_2, ..., x_n$. Μετά έχουμε

Πρόταση 3.1 Έστω M μια πολλαπλότητα διάστασης n. Τότε
• ο συνεφαπτόμενος χώρος T_a^* στο σημείο $a \in M$ είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n
• εάν (U, ϕ) είναι ένας χάρτης συντεταγμένων γύρω από το x με συντεταγμένες $x_1, x_2, ..., x_n$, τότε τα στοιχεία $(dx_1)_a, (dx_2)_a, ..., (dx_n)_a$ αποτελούν μια βάση

του T_a^*
• εάν $f \in C^\infty(M)$ και στον χάρτη συντεταγμένων $f\phi^{-1} = \phi(x_1, x_2, ..., x_n)$, τότε

$$(df)_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}[\phi(a)](dx_i)_a.$$

Απόδειξη: Εάν $f \in C^\infty(M)$ με $f\phi^{-1} = \phi(x_1, x_2, ..., x_n)$, τότε η

$$f - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}[\phi(a)]x_i$$

είναι μια τοπικά ορισμένη λεία συνάρτηση της οποίας η παράγωγος μηδενίζεται στο a, οπότε

$$(df)_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}[\phi(a)](dx_i)_a$$

και τα $(dx_1)_a, (dx_2)_a, ..., (dx_n)_a$ παράγουν τον T_a^*.
Εάν $\sum_i \lambda_i (dx_i)_a = 0$, τότε η ποσότητα $\sum_i \lambda_i x_i$ έχει παράγωγο μηδέν στο a οπότε $\lambda_i = 0$ για κάθε i. $\square$

Παρατήρηση 1: Για να απλουστεύσουμε τον συμβολισμό, θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για την συνάρτηση και την αναπαράστασή της σε κάποιο τοπικό σύστημα συντεταγμένων οπότε θα γράφουμε απλά

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Με κάποια αλλαγή συντεταγμένων $(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$, θα πάρουμε για την παράγωγο της συνάρτησης f ότι

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i.$$

Ορισμός 9. Ο *εφαπτόμενος χώρος* T_a στο σημείο $a \in M$ είναι ο δυϊκός χώρος του συνεφαπτόμενου χώρου T_a^*.

Αυτός είναι κάπως κυκλικός τρόπος για να ορίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο αλλά επειδή ο δυϊκός του δυϊκού χώρου ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι με φυσικό τρόπο ισόμορφος με τον αρχικό, ο ορισμός είναι συνεπής. Εάν το $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο

σημείο a και τα $(dx_1)_a, (dx_2)_a, ..., (dx_n)_a$ αποτελούν μια βάση του T_a^*, τότε η δυϊκή βάση του εφαπτόμενου χώρου T_a συμβολίζεται

$$(\frac{\partial}{\partial x_1})_a, (\frac{\partial}{\partial x_2})_a, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})_a.$$

Αυτός ο συμβολισμός ίσως ξενίζει αρχικά αλλά δικαιολογείται απολύτως: το πρόβλημα δημιουργείται επειδή η πολλαπλότητα M δεν είναι εμφυτευμένη μέσα σε κάποιο μεγαλύτερο Ευκλείδειο χώρο οπότε πρέπει να ορίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο με τρόπο συμφυή, κάτι που επιτυγχάνεται με την χρήση της *κατευθυνόμενης παραγώγου*: Εάν η f είναι μια συνάρτηση σε μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, τότε για κάθε εφαπτομενική διεύθυνση $\vec{u}$ στο a μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο της f στο σημείο a κατά την διεύθυνση του $\vec{u}$ που είναι ίση με τον πραγματικό αριθμό που προκύπτει από το παρακάτω εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{u} \cdot \nabla f(a),$$

εναλλακτικά χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $DF_a(u)$. Κατ' αναλογίαν με αυτό έχουμε λοιπόν τον παρακάτω:

Ορισμός 10. Ένα *εφαπτόμενο διάνυσμα* στο σημείο $a \in M$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $X_a : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει ο γνωστός κανόνας του Leibniz για την παράγωγο γινομένου

$$X_a(fg) = f(a)X_a g + g(a)X_a f.$$

Τώρα εάν $\xi \in T_a$ είναι ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου του $T_a^* = C^\infty(M)/Z_a$, τότε η

$$\xi \mapsto \xi((df)_a)$$

είναι μια γραμμική απεικόνιση από το $C^\infty(M)$ στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον

$$d(fg)_a = f(a)(dg)_a + g(a)(df)_a$$

οπότε το

$$X_a(f) = \xi((df)_a)$$

είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο a. Στην πραγματικότητα κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα είναι αυτής της μορφής αλλά το τίμημα που θα πρέπει να πληρώσουμε για τον αλγεβρικό ορισμό 10 παραπάνω είναι η απόδειξη του παρακάτω:

Λήμμα 3.2 Έστω X_a κάποιο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο a και f μια λεία συνάρτηση της οποίας η παράγωγος στο a μηδενίζεται. Τότε $X_a f = 0$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων κοντά στο σημείο a, από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(a + t(x-a))dt = \sum_i (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(a + t(x-a))dt.$$

Εάν $(df)_a = 0$ τότε η ποσότητα

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))dt$$

μηδενίζεται στο $x = a$ όπως και η ποσότητα $x_i - a_i$. Τώρα αν και αυτές οι συναρτήσεις ορίζονται τοπικά, χρησιμοποιώντας μια bump function μπορούμε να τις επεκτείνουμε σε όλη την M οπότε

$$f = f(a) + \sum_i g_i h_i$$

όπου $g_i(a) = h_i(a) = 0$.
Από τον κανόνα του Leibniz

$$X_a(1) = X_a(1 \cdot 1) = 2X_a(1),$$

που αποδυκνείει ότι το X_a μηδενίζει τις σταθερές συναρτήσεις. Εφαρμόζοντας τον κανόνα στην

$$f = f(a) + \sum_i g_i h_i$$

παίρνουμε ότι

$$X_a(f) = X_a(\sum_i g_i h_i) = \sum_i [g_i(a) X_a h_i + h_i(a) X_a g_i] = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $X_a : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ μηδενίζει το Z_a και είναι καλά ορισμένη στον $T_a^* = C^\infty(M)/Z_a$ οπότε $X_a \in T_a$. $\square$

Τα διανύσματα στον εφαπτόμενο χώρο είναι συνεπώς τα διανύσματα όπως ορίστηκαν στον Ορισμό 10. Χρησιμοποιώντας κάποιο τοπικό σύστημα συντεταγμένων μπορούμε να γράψουμε

$$X_a = \sum_{i=1}^n c_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_a,$$

οπότε μετά

$$X_a(f) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

3.3 Παράγωγοι Λείων Απεικονίσεων

Έστω $F : M \to N$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων και έστω $f \in C^\infty(N)$. Τότε η σύνθεση $f \circ F$ αποτελεί μια λεία συνάρτηση στην M.

Ορισμός 11. Η παράγωγος στο σημείο $a \in M$ της λείας απεικόνισης $F : M \to N$ είναι ο ομομορφισμός των αντίστοιχων εφαπτόμενων χώρων

$$DF_a : T_aM \to T_{F(a)}N$$

που ορίζεται ως εξής:

$$DF_a(X_a)(f) = X_a(f \circ F).$$

Αυτός είναι ένας αφηρημένος, ανεξάρτητος από συντεταγμένες, ορισμός. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την

$$X_a(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

για να δούμε πως

$$DF_a(\frac{\partial}{\partial x_i})_a(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ F)(a) =$$

$$= \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a) \frac{\partial f}{\partial y_j}(F(a)) = \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)(\frac{\partial}{\partial y_j})_{F(a)} f.$$

Συνεπώς η παράγωγος της F δίδει έναν αναλλοίωτο τρόπο για να ορίσουμε τον Ιακωβιανό πίνακα.

Με αυτό τον ορισμό μπορούμε να δώσουμε μια γενίκευση του Θεωρήματος 2.3, η απόδειξη είναι ανάλογη και παραλείπεται:

Θεώρημα 3.3 Έστω $F : M \to N$ μια λεία απεικόνιση και $c \in N$ κάποιο σημείο τέτοιο ώστε σε κάθε σημείο $a \in F^{-1}(c)$ η παράγωγος DF_a να είναι επί. Τότε το σύνολο $F^{-1}(c)$ αποτελεί λεία πολλαπλότητα με διάσταση ίση με $\dim M - \dim N$.

Κατά την πορεία της απόδειξης διαπιστώνει εύκολα κανείς πως η δομή πολλαπλότητας της $F^{-1}(c)$ καθιστά την συνάρτηση περιέχεσθαι

$$i : F^{-1}(c) \subset M$$

λεία απεικόνιση της οποίας η παράγωγος είναι 1-1 και απεικονίζεται ισόμορφα στον πυρήνα της DF. Συνεπώς όταν κατασκευάζουμε πολλαπλότητες με αυτό τον τρόπο, ο εφαπτόμενος χώρος στο σημείο a είναι

$$T_a \simeq KerDF_a.$$

Αυτό βοηθά στην κατανόηση των εφαπτόμενων χώρων στην περίπτωση που η F ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$:

Παραδείγματα:

1. Η σφαίρα S^n διάστασης n είναι $F^{-1}(1)$ όπου η $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ δίδεται από την σχέση

$$F(x) = \sum_i x_i^2.$$

Έτσι εδώ

$$DF_a(x) = 2\sum_i x_i a_i$$

και ο πυρήνας της DF_a αποτελείται από τα διανύσματα που είναι ορθογώνια με το a, κάτι που συμφωνεί με την διαισθητική εικόνα που έχουμε για τον εφαπτόμενο χώρο μιας σφαίρας.

2. Ο χώρος των $n \times n$ ορθογώνιων πινάκων $O(n)$ δίδεται από την $F^{-1}(I)$ όπου $F(A) = A^T A$. Στο $A = I$ (μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας), η παράγωγος είναι

$$DF_I(H) = H + H^T,$$

οπότε ο εφαπτόμενος χώρος του $O(n)$ στον μοναδιαίο πίνακα είναι $KerDF_I$, ο χώρος των αντισυμμετρικών πινάκων $H = -H^T$.

Τα παραπάνω παραδείγματα πολλαπλοτήτων της μορφής $F^{-1}(c)$ που βρίσκονται μέσα στην M αποτελούν και παραδείγματα υποπολλαπλοτήτων. Θα δώσουμε τον ορισμό της υποπολλαπλότητας που συχνά καλείται και εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα:

Ορισμός 12. Μια πολλαπλότητα M λέγεται *υποπολλαπλότητα* μιας πολλαπλότητας N εάν υπάρχει μια απεικόνιση περιέχεσθαι

$$i : M \to N$$

τέτοια ώστε

• η i να είναι λεία

• η Di_x να είναι 1-1 για κάθε $x \in M$

• η τοπολογία πολλαπλότητας της M να είναι η επαγώμενη τοπολογία από την N.

Παρατήρηση 1: Η τοπολογική υπόθεση αποφεύγει περιπτώσεις σαν την

$$i(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \in \mathbb{R}^2$$

για $t \in (-1, 1)$. Αυτή είναι λεία, 1-1, με 1-1 παράγωγο, αλλά κάθε ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^2$ που περιέχει το 0 τέμνει και τα δύο άκρα του διαστήματος, η καμπύλη αυτή είναι ο αριστερός βρόγχος της εκφυλισμένης κυβικής (καμπύλη 3ου βαθμού)

$$y^2 = x^2(x + 1).$$

4 Διανυσματικά Πεδία

4.1 Η Εφαπτόμενη Δέσμη

Σκεφτείτε την ταχύτητα του ανέμου σε κάθε σημείο της επιφάνειας της γης. Αυτό αποτελεί παράδειγμα ενός διανυσματικού πεδίου στην σφαίρα S^2 διάστασης 2. Αφού η S^2 βρίσκεται μέσα στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, το διανυσματικό αυτό πεδίο είναι μια λεία απεικόνιση $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε το $X(x)$ να είναι ένα εφαπτομενικό διάνυσμα της σφαίρας στο σημείο x.

Το πρόβλημά μας τώρα είναι να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο με συμφυή τρόπο πάνω σε μια τυχαία πολλαπλότητα M χωρίς αναφορά σε κάποιο ευρύτερο χώρο που να περιέχει την M. Γνωρίζουμε τι ακριβώς είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάποιο σημείο $a \in M$, δηλαδή ένα διάνυσμα στον διανυσματικό χώρο T_a, αλλά θα θέλαμε να περιγράψουμε μια λεία οικογένεια τέτοιων διανυσμάτων. Για να το επιτύχουμε αυτό θα πρέπει να συντεριάσουμε όλους τους εφαπτόμενους χώρους καθώς το σημείο a μεταβάλλεται πανω στην M σε μια νέα πολλαπλότητα που λέγεται *εφαπτόμενη δέσμη* TM της M. Έχουμε n βαθμούς ελευθερίας (συντεταγμένες) για το σημείο $a \in M$ και ακόμη n για κάθε εφαπτόμενο χώρο T_a, οπότε αναμένουμε να έχουμε μια πολλαπλότητα διάστασης $2n$. Συνεπώς το σύνολο που θεωρούμε αρχικά είναι το

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x$$

που αποτελείται από την ξένη τομή όλων των εφαπτόμενων χώρων.

Έστω (U, ϕ_U) ένας χάρτης συντεταγμένων της M. Τότε για κάποιο $x \in U$ τα εφαπτόμενα διανύσματα

$$(\frac{\partial}{\partial x_1})_x, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})_x$$

αποτελούν μια βάση για κάθε T_x. Συνεπώς έχουμε μια αμφεικόνιση

$$\psi_U : U \times \mathbb{R}^n \to \bigcup_{x \in U} T_x$$

που ορίζεται ως

$$\psi_U(x, y_1, ..., y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_x.$$

Οπότε η

$$\Phi_U = (\phi_U, id) \circ \psi^{-1} : \bigcup_{x \in U} T_x \to \phi_U(U) \times \mathbb{R}^n$$

αποτελεί έναν χάρτη συντεταγμένων για την

$$V = \bigcup_{x \in U} T_x.$$

Δοθέντων δύο χαρτών συντεταγμένων U_a, U_b στην M, φανερά

$$\Phi_a(V_a \cap V_b) = \phi_a(U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^n$$

που είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^{2n}$. Επίσης εάν $(x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι κάποιες συντεταγμένες στο U_a και $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ κάποιες συντεταγμένες στο U_b, τότε

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_x = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} (\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j})_x.$$

Έπεται λοιπόν ότι

$$\Phi_b \Phi_a^{-1}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n, \sum_j \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_i} y_i, ..., \sum_j \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_i} y_i),$$

και αφού ο Ιακωβιανός πίναξ είναι λείος ως προς την μεταβλητή x, γραμμικός ως προς την μεταβλητή y και αντιστρέψιμος, τότε η $\Phi_b \Phi_a^{-1}$ είναι επίσης λεία με λεία αντίστροφη οπότε το (V_a, Φ_a) ορίζει έναν άτλαντα στην εφαπτόμενη δέσμη TM.

Ορισμός 13. Η *εφαπτόμενη δέσμη* μιας πολλαπλότητας M είναι μια διαφορίσιμη δομή στην TM διάστασης $2n$ που ορίζεται από τον παραπάνω άτλαντα.

Η κατασκευή φανερώνει μια σειρά από ιδιότητες. Αρχικά η προβολική απεικόνιση

$$p : TM \to M$$

που αντιστοιχεί στο $X_a \in T_a M$ το σημείο a είναι λεία με παράγωγο που είναι επί διότι σε κάποιο τοπικό σύστημα συντεταγμένων ορίζεται ως

$$p(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = (x_1, ..., x_n).$$

Η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}(a)$ είναι ο διανυσματικός χώρος T_a και λέγεται μια *ίνα (ή νήμα)* της προβολής. Επίσης η TM αποτελεί τοπολογικό χώρο Hausdorff διότι εάν τα X_a, X_b βρίσκονται σε διαφορετικές ίνες, αφού η M είναι Hausdorff μπορούμε να διαχωρίσουμε τα $a, b \in M$ με ανοικτά U, U' οπότε τα ανοικτά σύνολα $p^{-1}(U), p^{-1}(U')$ χωρίζουν τα X_a, X_b στην TM. Εάν τα X_a, Y_a ανήκουν στον ίδιο εφαπτόμενο χώρο τότε βρίσκονται σε μια γειτονιά συντεταγμένων που είναι ομοιομορφική με κάποιο ανοικτό του $\mathbb{R}^{2n}$ οπότε μπορούν να χωριστούν

εκεί. Αφού η M έχει μια αριθμήσιμη βάση ανοικτών όπως και το $\mathbb{R}^n$, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι και η TM επίσης έχει μια αριθμήσιμη βάση.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο:

Ορισμός 14. Ένα *διανυσματικό πεδίο* σε μια πολλαπλότητα είναι μια λεία απεικόνιση

$$X : M \to TM$$

τέτοια ώστε

$$p \circ X = id_M.$$

Φανερά ο ορισμός αυτός είναι συνολικός. Για να εξηγήσουμε τι σημαίνει, αρκεί να γράψουμε τον ορισμό αναλυτικά χρησιμοποιώντας ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων: Αφού $p \circ X = id_M$, τότε

$$X(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, y_1(x), ..., y_n(x)),$$

όπου οι $y_i(x)$ είναι λείες συναρτήσεις. Συνεπώς το εφαπτόμενο διάνυσμα $X(x)$ δίδεται από την σχέση

$$X(x) \sum_i y_i(x)(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$$

που είναι μια οικογένεια εφαπτόμενων διανυσμάτων λεία ως προς την μεταβλητή x.

Παρατήρηση 1: Θα συναντήσουμε και άλλες πολλαπλότητες Q με προβολές $p : Q \to M$ και η ορολογία που χρησιμοποιείται είναι πως μια λεία απεικόνιση $s : M \to Q$ για την οποία $p \circ s = id_M$ λέγεται *διατομή*. Όταν $Q = TM$ η εφαπτόμενη δέσμη, υπάρχει πάντα η *μηδενική διατομή* που ορίζεται από το διανυσματικό πεδίο $X = 0$. Χρησιμοποιώντας μια bump function ψ μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε και άλλα διανυσματικά πεδία θεωρώντας ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων γράφοντας

$$X(x) = \sum_i y_i(x)(\frac{\partial}{\partial x_i})_x,$$

πολλαπλασιάζοντας επί ψ και επεκτείνοντας.

Παρατήρηση 2: Φανερά μπορούμε να κάνουμε μια παρόμοια κατασκευή χρησιμοποιώντας τους συνεφαπτόμενους χώρους T_a^* αντί των εφαπτόμενων χώρων T_a και χρησιμοποιώντας την βάση

$$(dx_1)_x, ..., (dx_n)_x$$

αντί της δυϊκής βάσης

$$(\frac{\partial}{\partial x_1})_x, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})_x.$$

Με αυτό τον τρόπο σχηματίζουμε την *συνεφαπτόμενη δέσμη* T^*M της M. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι μια απεικόνιση $df : M \to TM$ που ικανοποιεί την σχέση $p \circ df = id_M$, αλλά δεν είναι κάθε απεικόνιση αυτής της μορφής παράγωγος κάποιας συνάρτησης. Η εφαπτόμενη και η συνεφαπτόμενη δέσμη αποτελούν παραδείγματα *διανυσματικών δεσμών*:

Ορισμός 15. Μια (πραγματική) *διανυσματική δέσμη* τάξης m σε μια πολλαπλότητα M είναι μια άλλη πολλαπλότητα E μαζί με μια λεία προβολή $p : E \to M$ τέτοια ώστε

- κάθε ίνα $p^{-1}(x)$ αποτελεί (πραγματικό) διανυσματικό χώρο διάστασης m
- κάθε σημείο $x \in M$ έχει μια γειτονιά U και έναν διαφορομορφισμό

$$\psi_U : p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^m$$

τέτοιον ώστε η ψ_U απεικονίζει τον διανυσματικό χώρο $p^{-1}(x)$ ισόμορφα στον διανυσματικό χώρο $\{x\} \times \mathbb{R}^m$

- στην τομή $U \cap V$, η

$$\psi_U^{-1}\psi_V : U \cap V \times \mathbb{R}^m \to U \cap V \times \mathbb{R}^m$$

είναι της μορφής

$$(x, v) \mapsto (x, g_{UV}(x)v),$$

όπου η $g_{UV}(x)$ είναι μια λεία συνάρτηση ορισμένη στην τομή $U \cap V$ που παίρνει τιμές στο σύνολο των αντιστρέψιμων $m \times m$ πραγματικών πινάκων.

Για την εφαπτόμενη και την συνεφαπτόμενη δέσμη, η g_{UV} είναι ο Ιακωβιανός πίναξ ενός μετασχηματισμού συντεταγμένων ή ο αντίστροφος του συζυγή αυτού.

4.2 Τα Διανυσματικά Πεδία ως Παράγωγοι

Ο αλγεβρικός ορισμός ενός εφαπτόμενου διανύσματος (Ορισμός 10) δείχνει πως ένα διανυσματικό πεδίο X απεικονίζει μια λεία (C^∞) συνάρτηση σε μια συνάρτηση της M:

$$X(f)(x) = X_x(f)$$

και η τοπική έκφραση του X σημαίνει πως

$$X(f)(x) = \sum_i y_i(x)(\frac{\partial}{\partial x_i})_x(f) = \sum_i y_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Αφού οι $y_i(x)$ είναι λείες, η $X(f)$ είναι επίσης λεία και ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz

$$X(fg) = f(Xg) + g(Xf).$$

Στην πραγματικότητα, κάθε γραμμικός μετασχηματισμός με αυτή την ιδιότητα (που λέγεται μια παραγώγηση της άλγεβρας $C^\infty(M)$), αποτελεί διανυσματικό πεδίο:

Πρόταση 4.1 Έστω $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ μια γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz

$$X(fg) = f(Xg) + g(Xf).$$

Τότε η X αποτελεί ένα διανυσματικό πεδίο.

Απόδειξη: Για κάθε $a \in M$, η $X_a(f) = X(f)(a)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού ενός διανυσματικού πεδίου στο a, οπότε η X ορίζει μια απεικόνιση $X : M \to TM$ με $p \circ X = id_M$ οπότε τοπικά μπορεί να γραφεί ως

$$X_x = \sum_i y_i(x)(\frac{\partial}{\partial x_i})_x.$$

Απλά πρέπει να ελέγξουμε πως οι συναρτήσεις $y_i(x)$ είναι λείες και για αυτό αρκεί να εφαρμόσουμε την X σε μια συνάρτηση συντεταγμένων x_i που την επεκτείνουμε σε μια γειτονιά συντεταγμένων χρησιμοποιώντας μια bump function. Θα πάρουμε:

$$Xx_i = y_i(x)$$

και αφού εξ υποθέσεως η X απεικονίζει λείες συναρτήσεις σε λείες συναρτήσεις, είναι επίσης λεία. $\square$

Ο χαρακτηρισμός των διανυσματικών πεδίων μέσω της προηγούμενης πρότασης δίδει άμεσα έναν τρόπο συνδυασμού δύο διανυσματικών πεδίων για να προκύψει ένα τρίτο: Θεωρούμε δύο διανυσματικά πεδία X, Y ως γραμμικές απεικονίσεις από το σύνολο $C^\infty(M)$ στον εαυτό του και τις συνθέτουμε. Τότε

$$XY(fg) = X(f(Yg))+g(Yf)) = (Xf)(Yg)+f(XYg)+(Xg)(Yf)+g(XYf).$$

Ενώ

$$YX(fg) = Y(f(Xg))+g(Xf)) = (Yf)(Xg)+f(YXg)+(Yg)(Xf)+g(YXf).$$

Αφαιρώντας και θέτοντας $[X,Y] := XY - YX$ παίρνουμε

$$[X,Y](fg) = f([X,Y]g) + g([X,Y]f),$$

κάτι που από την Πρόταση 4.1 υποδηλώνει ότι και το $[X,Y]$ αποτελεί επίσης διανυσματικό πεδίο.

Ορισμός 16. Ο *μεταθέτης Lie* δύο διανυσματικών πεδίων X, Y είναι το διανυσματικό πεδίο

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Παράδειγμα 1: Εάν $M = \mathbb{R}$, τότε $X = fd/dx$, $Y = gd/dx$, οπότε

$$[X,Y] = (fg' - gf')\frac{d}{dx}.$$

Θα δούμε παρακάτω πως υπάρχει και γεωμετρική ερμηνεία του μεταθέτη Lie που είναι η παράγωγος Lie.

4.3 Μονοπαραμετρικές Ομάδες Διαφορομορφισμών

Σκεφτείτε την ταχύτητα του ανέμου (θεωρώντας πως είναι σταθερή στο χρόνο) πάνω στην επιφάνεια της γης ως ένα διανυσματικό πεδίο στην σφαίρα S^2. Μπορούμε να κάνουμε και μια διαφορετική ερμηνεία: Ένα σωμάτιο στην θέση $x \in S^2$ κινείται μετά από χρόνο t σε μια νέα θέση $\phi_t(x) \in S^2$. Μετά την πάροδο ακόμη s δευτερολέπτων βρίσκεται στην θέση

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_s(\phi_t(x)).$$

Αυτό που παίρνουμε με τον παραπάνω τρόπο είναι ένας ομομορφισμός ομάδων: Από την προσθετική ομάδα $\mathbb{R}$ στην ομάδα των διαφορομορφισμών της S^2 με πράξη την σύνθεση. Ο ορισμός είναι ο παρακάτω:

Ορισμός 17. Μια *μονοπαραμετρική ομάδα διαφορομορφισμών* μιας πολλαπλότητας M είναι μια λεία απεικόνιση

$$\phi : M \times \mathbb{R} \to M$$

τέτοια ώστε (γράφουμε $\phi_t(x) = \phi(x,t)$):

- για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η $\phi_t : M \to M$ αποτελεί διαφορομορφισμό
- για $t = 0$ έχουμε ότι $\phi_0 = id$
- ισχύει ότι $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$.

Θα δείξουμε ότι τα διανυσματικά πεδία παράγουν μονοπαραμετρικές ομάδες διαφορομορφισμών μόνο κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Εάν αντί της επιφάνειας της γης S^2 θεωρήσουμε για παράδειγμα το εσωτερικό της Ελλάδας και υποθέσουμε ότι ο άνεμος φυσά από την Δυτική διεύθυνση, φανερά μετά από οσοδήποτε μικρό χρόνο κάποια σωμάτια θα βρεθούν εκτός της χώρας οπότε δεν μπορούμε να περιμένουμε να υπάρχει κάποια $\phi_t(x)$ που να λειτουργεί για κάθε x και t. Το βασικό στοιχείο είναι πως η γη είναι συμπαγής και χωρίς σύνορο. Η ιδέα βέβαια εφαρμόζεται πάντα τουλάχιστον τοπικά και είναι ένας χρήσιμος εναλλακτικός τρόπος να καταννούμε τα διανυσματικά πεδία ως *απειροστούς διαφορομορφισμούς* αντί για παραγώγους συναρτήσεων.

Για να κάνουμε τη σύνδεση με τα διανυσματικά πεδία, υποθέτουμε πως η ϕ_t είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα διαφορομορφισμών και έστω f μια λεία συνάρτηση. Τότε η

$$f(\phi_t(a))$$

είναι μια λεία συνάρτηση του t και γράφουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\phi_t(a))|_{t=0} := X_a(f).$$

Άμεσα γίνεται καταννοητό πως αφού $\phi_0(a) = a$, ο κανόνας του Leibniz ιαχύει και αυτό αποτελεί ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο a οπότε καθώς το $a = x$ μεταβάλλεται έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο. Χρησιμοποιώντας κάποιες τοπικές συντεταγμένες έχουμε ότι

$$\phi_t(x_1, ..., x_n) = (y_1(x,t), ..., y_n(x,t))$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t} f(y_1, ..., y_n) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) \frac{\partial y_i}{\partial t}(x)|_{t=0} = \sum_i c_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

που δίδει το διανυσματικό πεδίο

$$X = \sum_i c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Στην συνέχεια θα ακολουθήσουμε αντίστροφη πορεία και θα πάμε από ένα διανυσματικό πεδίο σε έναν διαφορομορφισμό. Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε

την τροχιά ενός σωματιδίου:

Ορισμός 18. Μια *ολοκληρωτική καμπύλη* ενός διανυσματικού πεδίου X είναι μια λεία απεικόνιση $\phi : (a, b) \subset \mathbb{R} \to M$ που ικανοποιεί την σχέση

$$D\phi_t(\frac{d}{dt}) = X_{\phi(t)}.$$

Παράδειγμα 1: Έστω $M = \mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες (x, y) και έστω $X = \partial/\partial x$. Η παράγωγος $D\phi$ της λείας συνάρτησης $\phi(t) = (x(t), y(t))$ είναι

$$D\phi(\frac{d}{dt}) = \frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y}$$

οπότε η εξίσωση μιας ολοκληρωτικής καμπύλης του X θα είναι

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

και

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

που δίδουν

$$\phi(t) = (t + a_1, a_2).$$

Στο παράδειγμά μας με τον άνεμο το σωμάτιο θα έχει μεταφερθεί στο σημείο $(t + a_1, a_2)$.

Γενικά έχουμε:

Θεώρημα 4.2 Δοθέντος ενός διανυσματικού πεδίου X σε μια πολλαπλότητα M και ενός σημείου $a \in M$, υπάρχει μια μέγιστη ολοκληρωτική καμπύλη του X που διέρχεται από το σημείο a.

Απόδειξη: Αρχικά θεωρούμε ένα χάρτη συντεταγμένων (U_a, ϕ_a) γύρω από το a. Τότε εάν

$$X = \sum_i c_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

η εξίσωση

$$D\phi_t(\frac{d}{dt}) = X_{\phi(t)}$$

μπορεί να γραφεί ως σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) της μορφής

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i(x_1, ..., x_n).$$

Από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των ΣΔΕ (βλέπε Παράρτημα) προκύπτει πως υπάρχει κάποιο διάστημα στο οποίο υπάρχει μοναδική λύση με αρχική συνθήκη

$$(x_1(0), ..., x_n(0)) = \phi_a(a).$$

Έστω $\phi : (a, b) \to M$ μια τυχαία ολοκληρωτική καμπύλη με $\phi(0) = a$. Για κάθε $x \in (a, b)$ το υποσύνολο $\phi([0, x]) \subset M$ είναι συμπαγές οπότε μπορεί να καλυφθεί με ένα πεπερασμένο πλήθος από χάρτες συντεταγμένων, στον καθένα από τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας στα διαστήματα $[0, a_1], [a_1, a_2], ..., [a_n, x]$. Από την μοναδικότητα προκύπτει ότι αυτές οι τοπικές λύσεις συμφωνούν με την ϕ σε κάθε υποδιάστημα που περιέχει το 0.

Τελικά παίρνουμε το μέγιστο ανοικτό διάστημα στο οποίο μπορέι να ορισθεί η ϕ. $\square$

Για να βρούμε την μονοπαραμετρική ομάδα διαφορομορφισμών του X αφήνουμε το a να μεταβάλλεται πάνω στην M. Στο προηγούμενο παράδειγμα η ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από το (a_1, a_2) ήταν η $t \mapsto (t + a_1, a_2)$ η οποία με τη σειρά της ορίζει την ομάδα των διαφορομορφισμών

$$\phi_t(x_1, x_2) = (t + x_1, x_2).$$

Θεώρημα 4.3 Έστω X ένα διανυσματικό πεδίο σε μια πολλαπλότητα M και για κάποια $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$ έστω $\phi(x, t) = \phi_t(x)$ η μέγιστη ολοκληρωτική καμπύλη του X διαμέσου του σημείου x. Τότε:

- η απεικόνιση $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ είναι λεία

- $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ όταν οι απεικονίσεις ορίζονται

- εάν η M είναι συμπαγής τότε η $\phi_t(x)$ ορίζεται στο $\mathbb{R} \times M$ και δίδει μια μονοπαραμετρική ομάδα διαφορομορφισμών.

Απόδειξη: Το Θεώρημα 4.2 λέει πως για κάθε $a \in M$ έχουμε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha(a), \beta(a))$ στο οποίο η μέγιστη ολοκληρωτική καμπύλη ορίζεται. Το θεώρημα τοπικής ύπαρξης επίσης δίδει πως υπάρχει μια λύση για αρχικές συνθήκες σε μια γειτονιά του a οπότε το σύνολο

$$\{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : t \in (\alpha(a), \beta(a))\}$$

είναι ανοικτό. Αυτό είναι το μέγιστο σύνολο στο οποίο ορίζεται η $\phi_t(x)$.

Το Θεώρημα (βλέπε Παράρτημα) για την λεία εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες μας λέει επίσης ότι η $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$ είναι επίσης λεία.

Θεωρούμε στη συνέχεια την $(\phi_t \circ \phi_s)(x)$. Εάν σταθεροποιήσουμε το s και μεταβάλλουμε το t, τότε αυτή θα είναι η μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη του X διαμέσου του $\phi_s(x)$. Αλλά η $\phi_{t+s}(x)$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη που για $t=0$ περνά από το $\phi_s(x)$. Από την μοναδικότητα θα πρέπει να συμφωνούν οπότε $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$. (Σημειώστε ότι η σχέση $\phi_t \circ \phi_{-t} = id$ αποδεικνύει πως έχουμε διαφορομορφισμό όταν ορίζεται).

Τώρα θεωρούμε την περίπτωση που η M είναι συμπαγής. Για κάθε $x \in M$ έχουμε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha(a), \beta(a))$ που περιέχει το 0 και ένα ανοικτό σύνολο $U_x \subseteq M$ στο οποίο η $\phi_t(x)$ ορίζεται. Καλύπτουμε την M με ανοικτά $\{U_x\}_{x \in M}$ και παίρνουμε μια πεπερασμενη υποκάλυψη $U_{x_1}, ..., U_{x_N}$ και θέτουμε

$$I = \bigcap_{i=1}^{N} (\alpha(x_i), \beta(x_i))$$

που αποτελεί ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το 0. Εκ κατασκευής για κάποιο $t \in I$ παίρνουμε

$$\phi_t : I \times M \to M$$

που ορίζει μια ολοκληρωτική καμπύλη (αλλά όχι κατ' ανάγκη μέγιστη) διαμέσου κάθε σημείου $x \in M$ και με την ιδιότητα $\phi_0(x) = x$. Πρέπει να την επεκτείνουμε για όλες τις πραγματικές τιμές του t.

Εάν $s, t \in \mathbb{R}$, επιλέγουμε κάποιο n έτσι ώστε $(|s| + |t|)/n \in I$ και ορίζουμε (θεωρώντας την σύνθεση ως πολλαπλασιασμό)

$$\phi_t = (\phi_{t/n})^n$$

και

$$\phi_s = (\phi_{s/n})^n.$$

Τώρα επειδή τα $t/n, s/n$ και $(s+t)/n$ ανήκουν στο I έχουμε πως

$$\phi_{t/n}\phi_{s/n} = \phi_{(s+t)/n} = \phi_{s/n}\phi_{t/n}$$

οπότε επειδή τα $\phi_{t/n}$ και $\phi_{s/n}$ μετατίθενται έχουμε επίσης και ότι

$$\phi_t\phi_s = (\phi_{t/n})^n(\phi_{s/n})^n = (\phi_{(s+t)/n})^n = \phi_{s+t}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

4.4 Ο Μεταθέτης Lie αναθεωρείται

Όλα τα αντικείμενα που θα θεωρήσουμε έχουν την ιδιότητα ότι μετασχηματίζονται με φυσικό τρόπο κάτω από διαφορομορφισμούς και η σχέση μεταξύ διανυσματικών πεδίων και διαφορομορφισμών που είδαμε δίδει την απειροστή έκφραση αυτών.

Δοθέντων ενός διαφορομορφισμού $F : M \to M$ και μιας λείας συνάρτησης f παίρνουμε την μετασχηματισμένη συνάρτηση $f \circ F$. Όταν $F = \phi_t$ που παράγεται σύμφωνα με τα προηγούμενα θεωρήματα από ένα διανυσματικό πεδίο X, είδαμε πως

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\phi_t)|_{t=0} = X(f).$$

Συνεπώς: *Η φυσική δράση ενός διαφορομορφισμού πάνω σε συναρτήσεις εξειδικεύεται μέσω μονοπαραμετρικών ομάδων στην παράγωγο της συνάρτησης από ένα διανυσματικό πεδίο.*

Έστω τώρα ότι Y κάποιο διανυσματικό πεδίο που το θεωρούμε ως μια απεικόνιση $Y : M \to TM$. Με έναν διαφορομορφισμό $F : M \to M$, η παράγωγός του $DF_x : T_x \to T_{F(x)}$ δίδει

$$DF_x(Y_x) \in T_{F(x)}.$$

Αυτή ορίζει ένα νέο διανυσματικό πεδίο $\tilde{Y}$ μέσω της σχέσης

$$\tilde{Y}_{F(x)} = DF_x(Y_x).$$

Συνεπώς για μια συνάρτηση f,

$$(\tilde{Y})(f \circ F) = (Yf) \circ F.$$

Τώρα εάν $F = \phi_t$ για μια μονοπαραμετρική ομάδα, έχουμε την $\tilde{Y}_t$ την οποία μπορούμε να την διαφορίσουμε και να πάρουμε

$$\dot{Y} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{Y}_t|_{t=0}.$$

Χρησιμοποιώντας την

$$(\tilde{Y})(f \circ F) = (Yf) \circ F$$

παίρνουμε

$$\dot{Y}f + Y(Xf) = XYf$$

όπου $\dot{Y} = XY - YX$ είναι η παράγωγος Lie. Συνεπώς *η φυσική δράση των διαφορομορφισμών στα διανυσματικά πεδία εξειδικεύεται μέσω μονοπαραμετρικών ομάδων στον μεταθέτη Lie* $[X, Y]$.

5 Τανυστικά Γινόμενα

Μέχρι τώρα συναντήσαμε διανυσματικά πεδία και τις παραγώγους λείων συναρτήσεων ως αναλυτικά αντικείμενα που μπορούν να γενικευθούν σε πολλαπλότητες. Αυτά αποτελούν παραδείγματα μιας γενικότερης κλάσης αντικειμένων που λέγονται *τανυστές* τα οποία θα συναντήσουμε παρακάτω. Θα αρχίσουμε όμως την παρουσίασή μας από την γραμμική άλγεβρα και μετά θα περάσουμε στις αναλυτικές ιδιότητες των τανυστών.

Έστω V, W δύο (πραγματικοί) διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Μέσω αυτών θα ορίσουμε έναν νέο πραγματικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης $V \otimes W$ με δύο ιδιότητες:

- εάν $v \in V$ και $w \in W$ τότε υπάρχει το γινόμενο αυτών $v \otimes w \in V \otimes W$
- το γινόμενο αυτό είναι διγραμμικό:

$$(\lambda v_1 + \mu v_2) \otimes w = \lambda v_1 \otimes w + \mu v_2 \otimes w$$
$$v \otimes (\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda v \otimes w_1 + \mu v \otimes w_2.$$

Στην πραγματικότητα μας ενδιαφέρουν περισσότερο οι ιδιότητες του διανυσματικού χώρου $V \otimes W$ παρά το τι ακριβώς αυτός είναι (κάτι που δεν είναι πρωτόγνωρο στα μαθηματικά, για παράδειγμα τι ακριβώς είναι ένας πραγματικός αριθμός εκτός από μια ισοδύναμη κλάση από ακολουθίες Cauchy ρητών αριθμών;)

Πρόταση 5.1 Το τανυστικό γινόμενο $V \otimes W$ έχει την εξής καθολική ιδιότητα: Εάν η $B : V \times W \to U$ είναι μια διγραμμική απεικόνιση σε κάποιον διανυσματικό χώρο U, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$\beta : V \otimes W \to U$$

με την ιδιότητα

$$B(v, w) = \beta(v \otimes w).$$

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να ορισθεί ο $V \otimes W$. Στην περίπτωση πεπερασμένων διαστάσεων μπορούμε να πούμε πως ο $V \otimes W$ αποτελεί τον *δυϊκό χώρο του διανυσματικού χώρου των διγραμμικών μορφών επί του* $V \times W$, δηλαδή το σύνολο των απεικονίσεων $B : V \times W \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες

$$B(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda B(v_1, w) + \mu B(v_2, w)$$

και

$$B(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda B(v, w_1) + \mu B(v, w_2).$$

Δοθέντων $v \in V, w \in W$, ορίζουμε το $v \otimes w \in V \otimes W$ ως την απεικόνιση

$$(v \otimes w)(B) = B(v, w).$$

Αυτή ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα διότι δοθείσης της $B : V \times W \to U$ και ενός $\xi \in U^*$, τότε η σύνθεση $\xi \circ B$ είναι μια διγραμμική μορφή στο $V \times W$ και ορίζει μια γραμμική απεικόνιση από το U^* στον χώρο των διγραμμικών μορφών. Η δυϊκή απεικόνιση είναι ο ζητούμενος ομομορφισμός β από το $V \otimes W$ στο $(U^*)^* = U$.

Μια διγραμμική μορφή B ορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές της $B(v_i, w_i)$ στα διανύσματα βάσεων $v_1, ..., v_m \in V$ και $w_1, ..., w_n \in W$, πράγμα που σημαίνει ότι η διάσταση του διανυσματικού χώρου των διγραμμικών μορφών θα είναι mn, όση και η διάσταση του δυϊκού του χώρου $V \otimes W$. Στην πραγματικότητα μπορούμε σχετικά εύκολα να δούμε ότι τα mn διανύσματα

$$v_i \otimes w_j$$

αποτελούν μια βάση του $V \otimes W$. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε όμως πως ένα τυπικό στοιχείο του $V \otimes W$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα

$$\sum_{i,j} a_{ij} v_i \otimes w_j$$

και όχι απλά ως ένα γινόμενο $v \otimes w$.

Αν πάρουμε $W = V$, μπορούμε να σχηματίσουμε *δυνάμεις* από τανυστικά γινόμενα

$$V \otimes V, V \otimes V \otimes V = \otimes^3 V, ...$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\otimes^p V$ ως τον δυϊκό χώρο του διανυσματικού χώρου των *p-τάξης πολυγραμμικών μορφών* του V.

Αναμιγνύοντας (προσθέτοντας) διαφορετικούς βαθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε την *τανυστική άλγεβρα*

$$T(V) := \oplus_{k=0}^{\infty} (\otimes^k V).$$

Ένα τυχαίο σοιχείο της $T(V)$ γράφεται ως πεπερασμένο άθροισμα

$$\lambda 1 + v_0 + \sum v_i \otimes v_j + ... + \sum v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes ... \otimes v_{i_p}$$

τανυστικών γινομένων διανυσμάτων $v_i \in V$. Η προφανής πολλαπλασιαστική διαδικασία βασίζεται στην επέκταση μέσω της γραμμικότητας του γινομένου

$$(v_1 \otimes ... \otimes v_p)(u_1 \otimes ... \otimes u_q) = v_1 \otimes ... \otimes v_p \otimes u_1 \otimes ... \otimes u_q.$$

Το γινόμενο αυτό είναι προσεταιριστικό αλλά δεν είναι αντιμεταθετικό.

Περισσότερο στο μάθημα αυτό θα μας απασχολήσει ένα πηλίκο της τανυστικής άλγεβρας που λέγεται *εξωτερική άλγεβρα* την οποία είχαμε πρωτοσυναντήσει στις σημειώσεις του μαθήματος της Προβολικής Γεωμετρίας.

5.1 Η Εξωτερική Άλγεβρα

Έστω $T(V)$ η τανυστική άλγεβρα ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V και έστω $I(V)$ το *ιδεώδες* που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής

$$v \otimes v$$

όπου $v \in V$. Δηλαδή το $I(V)$ αποτελείται από όλα τα αθροίσματα γινομένων από στοιχεία της $T(V)$ από δεξιά και από αριστερά στους γεννήτορες $v \otimes v$.

Ορισμός 19. Η *εξωτερική άλγεβρα* του V είναι το πηλίκο

$$\Lambda^* V = T(V)/I(V).$$

Εάν $\pi : T(V) \to \Lambda^* V$ είναι η προβολή του πηλίκου τότε θέτουμε

$$\Lambda^p V = \pi(\otimes^p V)$$

και αυτό το σύνολο το λέμε *p-τάξης εξωτερική δύναμη του V*. Μπορούμε να δούμε αυτό το σύνολο και ως τον δυϊκό χώρο του χώρου των πολυγραμμικών μορφών του που μηδενίζονται εάν δύο μεταβλητές ταυτίζονται (οι μορφές αυτές λέγονται και *αντισυμμετρικές πολυγραμμικές μορφές*). Εάν $a \in \otimes^p V$, $b \in \otimes^q V$ τότε $a \otimes b \in \otimes^{p+q} V$ και παίρνοντας το πηλίκο αποκτάμε ένα γινόμενο που λέγεται εξωτερικό γινόμενο:

Ορισμός 20. Το *εξωτερικό γινόμενο* του $\alpha = \pi(a) \in \Lambda^p V$ και $\beta = \pi(b) \in \Lambda^q V$ ορίζεται ως

$$\alpha \wedge \beta = \pi(a \otimes b).$$

Παρατήρηση 1: Όπως και στις σημειώσεις της Προβολικής Γεωμετρίας, εάν $v_1, ..., v_p \in V$ τότε ορίζουμε ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου του χώρου των αντισυμμετρικών πολυγραμμικών μορφών ως εξής

$$v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p(M) = M(v_1, ..., v_p).$$

Οι βασικές ιδιότητες της εξωτερικής άλγεβρας ακολουθούν σε μορφή προτάσεων αμέσως παρακάτω:

Πρόταση 5.2 Εάν $\alpha \in \Lambda^p V, \beta \in \Lambda^q V$, τότε

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Απόδειξη: Επειδή για $v \in V$, $v \otimes v \in I(V)$, έπεται πως $v \wedge v = 0$ οπότε

$$0 = (v_1 + v_2) \wedge (v_1 + v_2) = 0 + v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_1 + 0.$$

Συνεπώς εάν εναλλάξουμε την θέση δύο παραγόντων σε εκφράσεις της μορφής

$$v_1 \wedge ... \wedge v_k$$

αλλάζει το πρόσημο.

Γράφουμε το α ως γραμμικό συνδυασμό όρων της μορφής $v_1 \wedge ... \wedge v_p$ και το β ως γραμμικό συνδυασμό όρων της μορφής $w_1 \wedge ... \wedge w_q$ και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον κανόνα της Πρότασης 5.2 για να φέρουμε το w_1 μπροστά βλέπουμε πως

$$(v_1 \wedge ... \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge ... \wedge w_q) = (-1)^p w_1 \wedge v_1 \wedge ... \wedge v_p \wedge w_2 \wedge ... \wedge w_q.$$

Για καθένα από τα q σε πλήθος w_i παίρνουμε έναν παράγοντα $(-1)^p$ οπότε τελικά αποκτάμε ότι

$$(w_1 \wedge ... \wedge w_q) \wedge (v_1 \wedge ... \wedge v_p) = (-1)^{pq} (v_1 \wedge ... \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge ... \wedge w_q),$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Πρόταση 5.3 Εάν $\dim V = n$ τότε $\dim \Lambda^n V = 1$.

Απόδειξη: Έστω $w_1, ..., w_n$ n διανύσματα του V. Επιλέγουμε μια βάση στον V και έστω M ο τεραγωνικός πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα $w_1, ..., w_n$. Τότε η

$$B(w_1, ..., w_n) = \det(M)$$

αποτελεί μια μη-μηδενική n-τάξης αντισυμμετρική πολυγραμμική μορφή του V: Εάν δύο από τα w_i ταυτίζονται, η ορίζουσα μηδενίζεται οπότε αυτή αποτελεί πράγματι μια n-τάξης αντισυμμετρική πολυγραμμική μορφή του V, δηλαδή είναι ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου του $\Lambda^n V$.

Από την άλλη μεριά επιλέγοντας μια βάση $v_1, ..., v_n$ του V, οποιοδήποτε στοιχείο του $\otimes^n V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός όρων σαν τους $v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_n}$ οπότε οποιοδήποτε στοιχείο του $\Lambda^n V$ γράφεται, χρησιμοποιώντας και την Πρόταση 5.2, ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1 \wedge ... \wedge v_n$.

Άρα ο $\Lambda^n V$ είναι μη-μηδενικός και το πολύ διάστασης 1 οπότε είναι ακριβώς διάστασης ένα. $\square$

Πρόταση 5.4 Έστω $v_1, ..., v_n$ μια βάση του V. Τότε τα

$$c(n,p) := \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

σε πλήθος στοιχεία $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge ... \wedge v_{i_p}$, όπου $i_1 < i_2 < ... < i_p$, αποτελούν μια βάση του $\Lambda^p V$ (όπου $c(n,p)$ οι γνωστοί δυωνιμικοί συντελεστές. Προφανώς εάν $\dim V = n$ τότε $\dim \Lambda^p V = c(n,p)$).

Απόδειξη: Αλλάζοντας την διάταξη και το πρόσημο μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε εξωτερική δύναμη των v_i οπότε αυτά τα στοιχεία φανερά παράγουν τον $\Lambda^p V$. Υποθέτουμε στη συνέχεια πως

$$\sum a_{i_1 ... i_p} v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge ... \wedge v_{i_p} = 0.$$

Επειδή $i_1 < i_2 < ... < i_p$, κάθε όρος έχει μοναδικό δείκτη από το υποσύνολο $\{i_1, i_2, ..., i_p\} = I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ και μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_I a_I v_I = 0.$$

Εάν τα I και J έχουν έναν αριθμό κοινό, τότε $v_I \wedge v_J = 0$, οπότε εάν το J έχει $n-p$ στοιχεία, τότε $v_I \wedge v_J = 0$ και πάλι εκτός εάν το J είναι το συμπληρωματικό υποσύνολο I'. Στην περίπτωση αυτή το γινόμενο είναι ένα πολλαπλάσιο του $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n$ και από την Πρόταση 5.2 αυτό είναι μη-μηδενικό. Συνεπώς πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο της

$$\sum_I a_I v_I = 0$$

επί $v_{I'}$ παίρνουμε ότι κάθε συντελεστής $a_I = 0$ οπότε έχουμε γραμμική ανεξαρτησία. $\square$

Πρόταση 5.5 Το διάνυσμα v είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1, ..., v_p$ εάν και μόνο εάν $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p \wedge v = 0$.

Απόδειξη: Εάν το διάνυσμα v είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1, ..., v_p$, τότε $v = \sum_i a_i v_i$ και παίρνουμε

$$v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p \wedge v = v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p \wedge (\sum_i a_i v_i) = 0$$

διότι υπάρχουν όροι με επαναλαμβανόμενα v_i. Εάν όχι, τότε τα $v_1, ..., v_p, v$ μπορούν να επεκταθούν σε μια βάση και από την Πρόταση 5.4 παίρνουμε ότι το γινόμενό τους είναι μη-μηδενικό. $\square$

Πρόταση 5.6 Εάν $A : V \to W$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, τότε υπάρχει ένας επαγόμενος γραμμικός μετασχηματισμός

$$\Lambda^p A : \Lambda^p V \to \Lambda^p W$$

με την ιδιότητα

$$\Lambda^p A(v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p) = Av_1 \wedge Av_2 \wedge ... \wedge Av_p.$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 5.4, ο τύπος

$$\Lambda^p A(v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p) = Av_1 \wedge Av_2 \wedge ... \wedge Av_p$$

ορίζει επακριβώς την δράση της $\Lambda^p A$ στα διανύσματα της βάσης αλλά δεν αποδυκνείει την ανεξαρτησία από την επιλογή βάσης. Όμως η καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου δίδει πως

$$\otimes^p A : \otimes^p V \to \otimes^p W$$

και η $\otimes^p A$ απεικονίζει το ιδεώδες $I(V)$ στο ιδεώδες $I(W)$ οπότε ορίζει την $\Lambda^p A$ με αναλλοίωτο τρόπο. $\square$

Πρόταση 5.7 Εάν $\dim V = n$, τότε ο γραμμικός μετασχηματισμός $\Lambda^n A : \Lambda^n V \to \Lambda^n V$ δίδεται από την ορίζουσα $\det A$.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 5.3 ο $\Lambda^n V$ έχει διάσταση 1 οπότε ο $\Lambda^n A$ είναι απλά πολλαπλασιασμός επί κάποιον πραγματικό αριθμό $\lambda(A)$. Συνεπώς επιλέγοντας μια βάση $v_1, ..., v_n$ του V,

$$\Lambda^n A(v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n) = Av_1 \wedge Av_2 \wedge ... \wedge Av_n = \lambda(A) v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n.$$

Όμως

$$Av_i = \sum_j A_{ji} v_j$$

οπότε

$$Av_1 \wedge Av_2 \wedge ... \wedge Av_n = \sum A_{j_1 1} v_{j_1} \wedge A_{j_2 2} v_{j_2} \wedge ... \wedge A_{j_n n} v_{j_n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma_1 1} v_{\sigma_1} \wedge A_{\sigma_2 2} v_{\sigma_2} \wedge ... \wedge A_{\sigma_n n} v_{\sigma_n},$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις μεταθέσεις $\sigma \in S_n$ n στοιχείων. Αλλά εάν η σ είναι μια αναδιάταξη, τότε ο όρος $v_{\sigma_1} \wedge v_{\sigma_2} \wedge ... \wedge v_{\sigma_n}$ αλλάζει πρόσημο οπότε

$$Av_1 \wedge Av_2 \wedge ... \wedge Av_n = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\sigma A_{\sigma_1 1} A_{\sigma_2 2} ... A_{\sigma_n n} v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n$$

που δεν είναι άλλος από τον ορισμό της ορίζουσας $\det A$. $\square$

6 Διαφορικές Μορφές

6.1 Η Δέσμη των p-μορφών

Έστω τώρα M μια πολλαπλότητα διάστασης n και έστω T_x^* ο συνεφαπτόμενος χώρος στο σημείο $x \in M$. Σχηματίζουμε την p-εξωτερική δύναμη

$$\Lambda^p T_x^*$$

και όπως κάναμε για την εφαπτόμενη και την συνεφαπτόμενη δέσμη θα δούμε ότι και το σύνολο

$$\Lambda^p T^* M = \bigcup_{x \in M} \Lambda^p T_x^*$$

αποτελεί μια νέα διανυσματική δέσμη οπότε αποτελεί πολλαπλότητα.

Εάν $x_1, ..., x_n$ είναι κάποιες συντεταγμένες ενός χάρτη (U, ϕ_U) της M, τότε για $x \in U$ τα στοιχεία

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$$

για $i_1 < i_2 < ... < i_p$ αποτελούν μια βάση του $\Lambda^p T_x^*$. Οι

$$c(n,p) := \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

σε πλήθος συντελεστές του $\alpha \in \Lambda^p T_x^*$ τότε δίδουν έναν χάρτη συντεταγμένων Ψ_U που απεικονίζει το ανοικτό σύνολο $U \subset M$ στο ανοικτό υποσύνολο

$$\phi_U(U) \times \Lambda^p \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{c(n,p)}.$$

Όταν $p = 1$ παίρνουμε τον χάρτη συντεταγμένων που χρησιμοποιήσαμε για την συνεφαπτόμενη δέσμη:

$$\Phi_U(x, \sum y_i dx_i) = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$$

και σε δύο αλληλοεπικαλυπτόμενους χάρτες θα έχουμε

$$\Phi_b \Phi_a^{-1}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n, \sum_i \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_1} y_i, ..., \sum_i \frac{\tilde{x}_i}{\partial x_n} y_i).$$

Για την p-οστή εξωτερική δύναμη θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τον Ιακωβιανό πίνακα

$$J = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}$$

με την επαγόμενη γραμμική απεικόνιση

$$\Lambda^p J : \Lambda^p \mathbb{R}^n \to \Lambda^p \mathbb{R}^n.$$

Η αναλυτική έκφραση, αν επιλέξουμε μια βάση, είναι πολύπλοκη, αλλά είναι αντιστρέψιμη και κάθε στοιχείο αποτελεί πολυώνυμο λείων συναρτήσεων οπότε δίδει μια λεία απεικόνιση με λεία αντίστροφη. Με άλλα λόγια η

$$\Psi_b \Psi_a^{-1}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες ορισμού μιας πολλαπλότητας διάστασης $n + c(n, p)$.

Ορισμός 21. Η *δέσμη των p-μορφών* μιας πολλαπλότητας M είναι η διαφορίσιμη δομή στην πολλαπλότητα $\Lambda^p T^* M$ που ορίζεται μέσω του παραπάνω άτλαντα. Υπάρχει μια φυσική προβολή $p : \Lambda^p T^* M \to M$ και μια διατομή λέγεται μια *διαφορίσιμη p-μορφή*.

Παραδείγματα:

1. Μια μηδενική μορφή είναι μια διατομή της $\Lambda^0 T^* M$ και εξ ορισμού αυτή είναι μια λεία συνάρτηση f.

2. Μια 1-μορφή είναι μια διατομή της συνεφαπτόμενης δέσμης $T^* M$. Από τον ορισμό της παραγώγου df μιας συνάρτησης f είναι σαφές πως η df αποτελεί 1-μορφή. Σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων μπορούμε να γράψουμε

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Χρησιμοποιώντας μια bump function μπορούμε να *επεκτείνουμε* μια p-μορφή που ορίζεται τοπικά σαν την $dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_p$ σε ολόκληρη την πολλαπλότητα M οπότε διατομές υπάρχουν πάντα. Στην πραγματικότητα θα είναι πολύ βολικό να αποδείξουμε ότι κάθε συνάρτηση, μορφή ή διανυσματικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα αντίστοιχων αντικειμένων που αρχικά ορίζονται μόνο τοπικά, για την επέκτασή τους σε ολόκληρη την M θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της *διαμέρισης της μονάδας* (partition of unity).

6.2 Διαμερίσεις της Μονάδας

Ορισμός 22. Μια *διαμέριση της μονάδας* σε μια πολλαπλότητα M είναι μια συλλογή $\{\phi_i\}_{i \in I}$ λείων συναρτήσεων με τις εξής ιδιότητες:

- $\phi_i \geq 0$

- το υποστήριγμα $\{supp\phi_i : i \in I\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο

- $\sum_i \phi_i = 1$.

Τοπικά πεπερασμένο εδώ σημαίνει ότι για κάθε $x \in M$ υπάρχει μια γειτονιά U που τέμνει μόνο πεπερασμένο πλήθος υποστηριγμάτων (σύνολα που η συνάρτηση δεν μηδενίζεται) $supp\phi_i$.

Στο Παράρτημα αποδυκνείουμε το παρακάτω γενικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6.1 Δοθείσης μιας ανοικτής κάλυψης $\{V_a\}$ μιας πολλαπλότητας M, υπάρχει μια διαμέριση της μονάδας $\{\phi_i\}_{i\in I}$ στην M τέτοια ώστε $supp\phi_i \subset V_{a(i)}$ για κάποιο $a(i)$.

Λέμε τότε ότι η διαμέριση της μονάδας είναι *υποτεταγμένη (subordinate)* στην δοθείσα κάλυψη.

Σε αυτό το σημείο ας σημειώσουμε πως εάν η M είναι συμπαγής τα πράγματα είναι αρκετά πιο απλά: για κάθε σημείο $x \in \{V_a\}$ παίρνουμε μια γειτονιά συντεταγμένων $U_x \subset \{V_a\}$ και μια bump function που είναι ίση με 1 σε μια γειτονιά V_x του x και της οποίας το υποστήριγμα βρίσκεται εντός του U_x. Η συμπάγεια λέει ότι μπορούμε να αποσπάσουμε μια πεπερασμένη υποκάλυψη της $\{V_x\}_{x\in X}$ οπότε παίρνουμε λείες συναρτήσεις $\psi_i \geq 0$ για $i = 1, ..., N$ και ίσες με 1 στο V_{x_i}. Πιο συγκεκριμένα το άθροισμα είναι θετικό και ορίζοντας

$$\phi_i := \frac{\psi_i}{\sum_{i=1}^{N} \psi_i}$$

αποκτάμε μια διαμέριση της μονάδας.

Τώρα όχι μόνο μπορούμε να δημιουργήσουμε συνολικές (global) p-μορφές παίρνοντας αρχικά τοπικές, πολλαπλασιάζοντας επί ϕ_i και επεκτείνοντας με το μηδέν αλλά και αντίστροφα, εάν η α είναι μια τυχαία p-μορφή μπορούμε να την γράψουμε ως

$$\alpha = (\sum_i \phi_i)\alpha = \sum_i (\phi_i \alpha)$$

που είναι ένα άθροισμα από επεκτάσεις τοπικών μορφών.

Στο σημείο αυτό ίσως να μην γίνεται φανερό γιατί επιμένουμε να εισαγάγουμε αυτά τα πολύπλοκα αντικείμενα της εξωτερικής άλγεβρας, τις διαφορικές μορφές. Για να το εξηγήσουμε αυτό ας επαναλάβουμε τον στόχο μας: Θα θέλαμε να γενικεύσουμε τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό αλλά και την διανυσματική ανάλυση που ξέρουμε από χωρία του $\mathbb{R}^n$ σε πολλαπλότητες διάστασης n. Υπάρχουν δύο κίνητρα λοιπόν: Το πρώτο είναι διότι η αλγεβρική θεωρία των οριζουσών αποτελεί όπως έχουμε δει τμήμα της εξωτερικής άλγεβρας και τα πολλαπλά ολοκληρώματα περιέχουν ορίζουσες και αργότερα θα είμαστε σε θέση να ολοκληρώσουμε p-μορφές σε πολλαπλότητες διάστασης p.

Το δεύτερο κίνητρο είναι η ύπαρξη του διαφορικού τελεστή του στροβιλισμού (curl) στην διανυσματική ανάλυση του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ που απεικονίζει διανυσματικά πεδία σε διανυσματικά πεδία. Ως γνωστόν ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου έστω $\vec{A}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται ως το εξωτερικό γινόμενο του διανυσματικού τελεστή ανάδελτα επί το διανυσματικό πεδίο

$$curlA = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

και το εξωτερικό γινόμενο είναι αντισυμμετρικό. Θα δούμε πως η γενίκευση του στροβιλισμού για οποιαδήποτε διάσταση και για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων απαιτεί την χρήση διαφορικών μορφών αντί των διανυσμάτων.

6.3 Η Χρήση Διαφορικών Μορφών στην Πράξη

Ορίσαμε μια διαφορική p-μορφή στον Ορισμό 21 ως μια διατομή μιας διανυσματικής δέσμης. Επιλέγοντας ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων μια διαφορική p-μορφή έστω α γράφεται ως εξής:

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

όπου οι συντελεστές $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x)$ είναι λείες συναρτήσεις. Εάν $x(y)$ είναι ένα διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων, τότε γράφουμε τις παραγώγους ως

$$dx_{i_k} = \sum_j \frac{\partial x_{i_k}}{\partial y_j} dy_j$$

και αντικαθιστώντας στην

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

παίρνουμε

$$\alpha = \sum_{j_1<j_2<...<j_p} \tilde{a}_{j_1 j_2 ... j_p}(y) dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge ... \wedge dy_{j_p}.$$

Παράδειγμα 1: Έστω $M = \mathbb{R}^2$ και θεωρούμε την 2-μορφή $\omega = dx_1 \wedge dx_2$. Αλλάζουμε σε πολικές συντεταγμένες σε ένα ανοικτό σύνολο $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$:

$$x_1 = r \cos \theta$$

και

$$x_2 = r \sin \theta.$$

Τότε

$$dx_1 = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

ενώ

$$dx_2 = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

οπότε

$$\omega = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) = r dr \wedge d\theta.$$

Συχνά θα συμβολίζουμε με

$$\Omega^p(M)$$

τον (πραγματικό) διανυσματικό χώρο απείρων διαστάσεων όλων των p-μορφών της M.

Αν και πρώτα εισαγάγαμε τα διανυσματικά πεδία ως αναλυτικά αντικείμενα σε πολλαπλότητες, εν τούτοις οι διαφορικές μορφές είναι πιο βολικές. Για παράδειγμα, έστω πως έχουμε μια λεία απεικόνιση

$$F : M \to N.$$

Η παράγωγος αυτής δίδει σε κάθε σημείο $x \in M$ μια γραμμική απεικόνιση

$$DF_x : T_x M \to T_{F(x)} N$$

αλλά εάν έχουμε μια διατομή της εφαπτόμενης δέσμης TM (δηλαδή ένα διανυσματικό πεδίο) X, τότε η παράγωγος $DF_x(X_x)$ εν γένει δεν ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο στην N (δεν μας λέει τι να επιλέξουμε στον $T_a N$ εάν το $a \in N$ δεν ανήκει στην εικόνα της F).

Από την άλλη μεριά όμως εάν η α είναι μια διατομή της $\Lambda^p T^* N$ (δηλαδή μια p-μορφή), τότε η δυϊκή απεικόνιση

$$DF'_x : T^*_{F(x)} N \to T^*_x M$$

ορίζει την επαγόμενη απεικόνιση

$$\Lambda^p(DF'_x) : \Lambda^p T^*_{F(x)}N \to \Lambda^p T^*_x M$$

και τότε η

$$\Lambda^p(DF'_x)(\alpha_{F(x)})$$

ορίζεται για κάθε x και είναι μια διατομή της $\Lambda^p T^*_x M$, δηλαδή μια p-μορφή της M.

Ορισμός 23. Το *τράβηγμα-πίσω (pull-back)* μιας p-μορφής $\alpha \in \Omega^p(N)$ από μια λεία απεικόνιση $F : M \to N$ είναι η p-μορφή $F^*\alpha \in \Omega^p(M)$ που ορίζεται ως εξής

$$(F^*\alpha)_x := \Lambda^p(DF'_x)(\alpha_{F(x)}).$$

Παράδειγμα 2: Το τράβηγμα-πίσω μιας 0-μορφής $f \in C^\infty(N)$ είναι απλά η σύνθεση $f \circ F$.

Παράδειγμα 3: Έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση που ορίζεται ως

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2 + x_3) = (x, y)$$

και επιλέγουμε

$$\alpha = xdx \wedge dy.$$

Τότε

$$F^*\alpha = (x \circ F)d(x \circ F) \wedge d(y \circ F) = x_1x_2d(x_1x_2) \wedge d(x_2 + x_3) =$$

$$= x_1x_2(x_1dx_2+x_2dx_1)\wedge d(x_2+x_3) = x_1^2x_2dx_2\wedge dx_3+x_1x_2^2dx_1\wedge dx_2+x_1x_2^2dx_1\wedge dx_3.$$

Από τις αλγεβρικές ιδιότητες των απεικονίσεων

$$\Lambda^p A : \Lambda^p V \to \Lambda^p V$$

προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες ιδιότητες για το τράβηγμα πίσω:

- $(F \circ G)^*\alpha = G^*(F^*\alpha)$
- $F^*(\alpha + \beta) = F^*\alpha + F^*\beta$
- $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta.$

6.4 Η Εξωτερική Παράγωγος

Ερχόμαστε στη συνέχεια στην κατασκευή του βασικού διαφορικού τελεστή στις διαφορικές μορφές, *την εξωτερική παράγωγο*, που γενικεύει τους γνωστούς διαφορικούς τελεστές *div*, *grad*, *curl* της διανυσματικής ανάλυσης στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Η βασική ιδιότητά του είναι πως ορίζεται με εντελώς φυσικό τρόπο από την δομή της πολλαπλότητας χωρίς καμία επιπρόσθετη προϋπόθεση.

Θεώρημα 6.2 Σε κάθε πολλαπλότητα M υπάρχει μια φυσική γραμμική απεικόνιση

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

που ονομάζεται *εξωτερική παράγωγος* με τις εξής ιδιότητες:

1. εάν $f \in \Omega^0(M)$, τότε η $df \in \Omega^1(M)$ είναι η παράγωγος της f

2. $d^2 = 0$

3. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ εάν $\alpha \in \Omega^p(M)$.

Απόδειξη: Θα ορίσουμε το $d\alpha$ αναλύοντας πρώτα το α σε άθροισμα όρων με υποστήριγμα σε κάποιο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (χρησιμοποιώντας μια διαμέριση της μονάδας), κατόπιν θα ορίσουμε έναν τοπικό διαφορικό τελεστή d χρησιμοποιώντας ένα σύστημα συντεταγμένων και τότε θα αποδείξουμε πως το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της επιλογής συστήματος συντεταγμένων.

Αρχίζουμε γράφοντας μια p-μορφή τοπικά ως

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

και ορίζουμε την $d\alpha$ ως εξής

$$d\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} da_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Όταν $p = 0$ αυτή είναι απλά η παράγωγος οπότε η πρώτη ιδιότητα του Θεωρήματος ισχύει.

Για την δεύτερη ιδιότητα αναλύουμε την παράγωγο

$$d\alpha = \sum_{j, i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \frac{\partial a_{i_1 i_2 \ldots i_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

και μετά υπολογίζουμε

$$d^2\alpha = \sum_{j,k,i_1<i_2<...<i_p} \frac{\partial^2 a_{i_1 i_2 ... i_p}}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}.$$

Ο όρος

$$\frac{\partial^2 a_{i_1 i_2 ... i_p}}{\partial x_j \partial x_k}$$

είναι συμμετρικός στους δείκτες j, k αλλά πολλαπλασιάζεται με το $dx_k \wedge dx_j$ που είναι αντισυμμετρικό στα j, k οπότε η έκφραση μηδενίζεται εκ ταυτότητος και άρα έχουμε ότι $d^2\alpha = 0$ όπως απαιτείται.

Για την τρίτη ιδιότητα, την ελέγχουμε στις αποσυνθέσιμες μορφές

$$\alpha = f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} = f dx_I$$

$$\beta = g dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_q} = g dx_J$$

και επεκτείνουμε μέσω της γραμμικότητας, οπότε

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(fg dx_I \wedge dx_J) = d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J = (f dg + g df) \wedge dx_I \wedge dx_J =$$

$$= (-1)^p f dx_I \wedge dg \wedge dx_J + df \wedge dx_I \wedge g dx_J = (-1)^p \alpha \wedge d\beta + d\alpha \wedge \beta.$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων ορίσαμε έναν διαφορικό τελεστή d που ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες του Θεωρήματος. Έστω τώρα ότι αναπαριστάμε την διαφορική p-μορφή α χρησιμοποιώντας κάποιες άλλες συντεταγμένες $y_1, y_2, ..., y_n$:

$$\alpha = \sum_{i_1<i_2<...<i_p} b_{i_1 i_2 ... i_p} dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge ... \wedge dy_{i_p}$$

και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε

$$d'\alpha = \sum_{i_1<i_2<...<i_p} db_{i_1 i_2 ... i_p} dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge ... \wedge dy_{i_p}.$$

Προφανώς και ο d' ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες του Θεωρήματος. Θα αποδείξουμε ότι $d = d'$ χρησιμοποιώντας τις τρεις ιδιότητες.

Από τις (1) και (3) έχουμε ότι

$$d\alpha = d(\sum_{i_1<i_2<...<i_p} b_{i_1 i_2 ... i_p} dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge ... \wedge dy_{i_p}) =$$

$$= \sum_{i_1<i_2<...<i_p} db_{i_1 i_2 ... i_p} dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge ... \wedge dy_{i_p} + \sum_{i_1<i_2<...<i_p} b_{i_1 i_2 ... i_p} d(dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge ... \wedge dy_{i_p})$$

και από την (3)

$$d(dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge ... \wedge dy_{i_p}) = d(dy_{i_1}) \wedge dy_{i_2} \wedge ... \wedge dy_{i_p} - dy_{i_1} \wedge d(dy_{i_2} \wedge ... \wedge dy_{i_p}).$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $d^2 y_{i_1} = 0$ και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο στο δεξί μέλος παίρνουμε μηδέν για όλους τους όρους.

Συνεπώς σε κάθε γειτονιά συντεταγμένων U έχουμε πως

$$d\alpha = \sum_{i_1<i_2<...<i_p} db_{i_1 i_2 ... i_p} dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge ... \wedge dy_{i_p} = d'\alpha$$

οπότε η $d\alpha$ είναι ολικά καλά ορισμένη. $\square$

Παραδείγματα: Ας δούμε την περίπτωση που $M = \mathbb{R}^3$, (κάτι που αντιστοιχεί στην γνωστή μας διανυσματική ανάλυση στον Ευκλείδειο χώρο τριών διαστάσεων), ακολουθώντας τις ιδιότητες της d για όλες τις περιπτώσεις $p = 0, 1, 2$.

$p = 0$**:** Εξ ορισμού

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

κάτι που κανονικά θα το γράφαμε ως $gradf = \vec{\nabla} f$.

$p = 1$**:** Ο χώρος των 1-μορφών έχει διάσταση $c(3, 1) = 3!/(1!2!) = 3$ οπότε μια τυχαία 1-μορφή α θα γράφεται ως

$$\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$$

οπότε εφαρμόζοντας τον ορισμό της εξωτερικής παραγώγου θα πάρουμε

$$d(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3) = da_1 \wedge dx_1 + da_2 \wedge dx_2 + da_3 \wedge dx_3 =$$

$$= (\frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_3) \wedge dx_1 +$$

$$+ (\frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3} dx_3) \wedge dx_2 +$$

$$+ (\frac{\partial a_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3) \wedge dx_3$$

$$= (\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1})dx_3 \wedge dx_1 + (\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2})dx_1 \wedge dx_2 + (\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3})dx_2 \wedge dx_3.$$

Οι συντελεστές αυτής της 2-μορφής αποτελούν τον *στροβιλισμό* ενός διανυσματικού πεδίου

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}$$

αλλά το α τώρα αποτελεί μια 1-μορφή και όχι διανυσματικό πεδίο, ενώ το $d\alpha$ αποτελεί 2-μορφή και όχι διανυσματικό πεδίο, δηλαδή η ερμηνεία έχει αλλάξει. Παρατηρήστε όμως τις εξής συμπτώσεις: ο χώρος των 1-μορφών έχει διάσταση 3, δηλαδή είναι *ισόμορφος* με τον χώρο των διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ (και άρα 1-μορφές και διανύσματα μπορούν να ταυτιστούν) ενώ ο χώρος των 2-μορφών έχει διάσταση επίσης $c(3,2) = 3$ οπότε και οι 2-μορφές μπορούν να ταυτιστούν με διανύσματα οπότε η 2-μορφή $d\alpha$ μπορεί να ειδωθεί και ως διάνυσμα (που είναι ο στροβιλισμός του διανύσματος $\vec{\alpha}$). Παρατηρήστε τέλος ότι η ιδιότητα $d^2 = 0$ αντιστοιχεί στην βασική σχέση που ισχύει στον $\mathbb{R}^3$ ότι $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$ $(curl(gradf) = 0)$.

$p = 2$: Τώρα έχουμε μια 2-μορφή

$$\beta = b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2$$

και παίρνοντας την εξωτερική της παράγωγο θα πάρουμε μια 3-μορφή

$$d\beta = \frac{\partial b_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 =$$

$$= (\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

κάτι που αποτελεί την *απόκλιση* ενός διανυσματικού πεδίου

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b}.$$

Η ερμηνεία αυτή στηρίζεται στις εξής ταυτήσεις: αρχικά ταυτίζουμε τις 2-μορφές και τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ διότι ως πραγματικοί διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι αφού έχουν την ίδια διάσταση που είναι ίση με 3. Σημειώνουμε επίσης ότι η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου αποτελεί βαθμωτή ποσότητα, οι βαθμωτές ποσότητες αποτελούν πραγματικό διανυσματικό χώρο διάστασης 1 (ταυτίζονται με το σώμα $\mathbb{R}$) αλλά και οι 3-μορφές αποτελούν διανυσματικό χώρο διάστασης $c(3,3) = 1$. Η βασική ιδιότητα $d^2 = 0$ αντιστοιχεί στην βασική σχέση που ισχύει στον $\mathbb{R}^3$ ότι $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = 0$ $(div(curl\vec{b}) = 0)$.

Βλέπουμε γνωστές σχέσεις αλλά χρησιμοποιούμε καινούργια αντικείμενα (τις διαφορικές μορφές και την εξωτερική παράγωγο). Η δυνατότητα του τραβήγματος πίσω των διαφορικών μορφών μέσω λείων απεικονίσεων θα μας δόσει μεγαλύτερες δυνατότητες ακόμη και στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο απ΄ ότι μας παρέχουν τα γνωστά διανύσματα. Σημειώνουμε με έμφαση πως ο λόγος που η χρήση διαφορικών μορφών δίδει τα γνωστά αποτελέσματα της διανυσματικής ανάλυσης είναι οι διάφορες συμπτώσεις που επισυμβαίνουν στον Ευκλείδειο χώρο 3 διαστάσεων $\mathbb{R}^3$: οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι των γνωστών (ελεύθερων) διανυσμάτων, των 1-μορφών και των 2-μορφών έχουν διάσταση 3, οπότε είναι ισόμορφοι (και άρα ταυτίζονται) ενώ οι διανυσματικοί χώροι των βαθμωτών ποσοτήτων και των 3-μορφών έχουν διάσταση 1 οπότε είναι επίσης ισόμορφοι.

Πρόταση 6.3 Έστω $F : M \to N$ μια λεία απεικόνιση και $\alpha \in \Omega^p(N)$. Τότε

$$d(F^*\alpha) = F^*(d\alpha).$$

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι η παράγωγος $DF_x : T_xM \to T_{F(x)}N$ ορίστηκε ως

$$DF_x(X_x)(f) = X_x(f \circ F)$$

έτσι ώστε η δυϊκή απεικόνιση $DF'_x : T^*_{F(x)}N \to T^*_xM$ ικανοποιεί τη σχέση

$$DF'_x(df)_{F(x)} = d(f \circ F)_x.$$

Από τον ορισμό του τραβήγματος -πίσω αυτό σημαίνει πως

$$F^*(df) = d(f \circ F) = d(F^*f).$$

Τώρα εάν

$$\alpha = \sum_{i_1<i_2<...<i_p} a_{i_1 i_2 ... i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p},$$

τότε το τράβηγμα-πίσω μέσω της F θα είναι

$$F^*\alpha = \sum_{i_1<i_2<...<i_p} a_{i_1 i_2 ... i_p}(F(x)) F^*dx_{i_1} \wedge F^*dx_{i_2} \wedge ... \wedge F^*dx_{i_p}$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική ιδιότητα του τραβήγματος -πίσω, τις ιδιότητες της εξωτερικής παραγώγου d και την

$$F^*(df) = d(f \circ F) = d(F^*f)$$

θα πάρουμε ότι

$$d(F^*\alpha) = \sum_{i_1<i_2<...<i_p} d[a_{i_1 i_2 ... i_p}(F(x))] F^*dx_{i_1} \wedge F^*dx_{i_2} \wedge ... \wedge F^*dx_{i_p} =$$

$$= \sum_{i_1<i_2<...<i_p} F^* da_{i_1 i_2 ... i_p} F^* dx_{i_1} \wedge F^* dx_{i_2} \wedge ... \wedge F^* dx_{i_p} =$$

$$= F^*(d\alpha)$$

□

6.5 Η Παράγωγος Lie των Διαφορικών Μορφών

Έστω ϕ_t μια μονοπαραμετρική (τοπικά ορισμένη) ομάδα διαφορομορφισμών που ορίζεται μέσω ενός διανυσματικού πεδίου X. Τότε υπάρχει μια *παράγωγος Lie* που ορίζεται με φυσικό τρόπο

$$L_X \alpha := \frac{\partial}{\partial t} \phi_t^* \alpha|_{t=0}$$

μιας p-μορφής α υπό το διανυσματικό πεδίο X η οποία είναι και πάλι μια p-μορφή. Θα δώσουμε μια χρήσιμη φόρμουλα για την παράγωγο Lie που περιέχει την εξωτερική παράγωγο.

Πρόταση 6.4 Δοθέντος ενός διανυσματικού πεδίου X σε μια πολλαπλότητα M, υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση

$$i(X) : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$$

που λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* και που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $i(X)df = X(f)$
- $i(X)(\alpha \wedge \beta) = i(X)\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i(X)\beta$ εάν $\alpha \in \Omega^p(M)$.

Η Πρόταση αυτή μας λέει επακριβώς πως να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο: εάν

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

και $\alpha = dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_p$ είναι μια βασική p-μορφή, τότε

$$i(X)\alpha = a_1 dx_2 \wedge ... \wedge dx_p - a_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge ... \wedge dx_p + ...$$

Πιο συγκεκριμένα

$$i(X)[i(X)\alpha] = a_1 a_2 dx_3 \wedge ... \wedge dx_p - a_2 a_1 dx_3 \wedge ... \wedge dx_p = 0.$$

Παράδειγμα 1: Έστω

$$\alpha = dx \wedge dy,$$

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

τότε

$$i(X)\alpha = xdy - ydx$$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι απλά μια κατασκευή της γραμμικής άλγεβρας και είδαμε πως το υπολογίζουμε στην πράξη γράφοντας μια μορφή ως άθροισμα βασικών μορφών. Θα πρέπει όμως να αποδείξουμε πως είναι καλά ορισμένο και ανεξάρτητο από τις διάφορες επιλογές που χρησιμοποιούμε κατά τον υπολογισμό του στην πράξη και αυτό μας οδηγεί στην παρακάτω πιο αφηρημένη απόδειξη:

Απόδειξη: Στην Παρατήρηση 5.1 ορίσαμε τον $\Lambda^p V$ ως τον δυϊκό χώρο του χώρου των αντισυμμετρικών (εναλλασσουσών) p-πολυγραμμικών μορφών του V. Εάν P είναι μια αντισυμμετρική $(p-1)$-πολυγραμμική μορφή του V και ξ μια γραμμική μορφή του V, τότε η

$$(\xi P)(v_1, v_2, ..., v_p) = \xi(v_1)P(v_2, ..., v_p) - \xi(v_2)P(v_1, v_3, ..., v_p) + ...$$

είναι μια αντισυμμετρική p-πολυγραμμική μορφή. Έτσι εάν $\alpha \in \Lambda^p V$ μπορούμε να ορίσουμε την $i(\xi)\alpha \in \Lambda^{p-1}V$ από τη σχέση

$$[i(\xi)\alpha](P) = \alpha(\xi P).$$

Παίρνοντας $V = T^*$ (ο συνεφαπτόμενος χώρος) και $\xi = X \in V^* = (T^*)^* = T$ (ο εφαπτόμενος χώρος) προκύπτει το εσωτερικό γινόμενο. Η εξίσωση

$$(\xi P)(v_1, v_2, ..., v_p) = \xi(v_1)P(v_2, ..., v_p) - \xi(v_2)P(v_1, v_3, ..., v_p) + ...$$

δεν είναι παρά η σχέση

$$i(X)\alpha = a_1 dx_2 \wedge ... \wedge dx_p - a_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge ... \wedge dx_p + ...$$

μέσω της οποίας υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο. $\square$

Παραθέτουμε στη συνέχεια την εξίσωση της παραγώγου Lie:

Πρόταση 6.5 Η παραγώγος Lie $L_X\alpha$ μιας p-μορφής α δίδεται από τη σχέση

$$L_X\alpha = d[i(X)\alpha] + i(X)d\alpha.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το δεξί μέλος

$$R_X(\alpha) = d[i(X)\alpha] + i(X)d\alpha.$$

Τώρα το $i(X)$ ελλατώνει τον βαθμό p κατά 1 αλλά η d τον αυξάνει κατά 1 οπότε η R_X απεικονίζει p-μορφές σε p-μορφές. Επίσης

$$d[d[i(X)\alpha] + i(X)d\alpha] = di(X)d\alpha = [di(X) + i(X)d]d\alpha.$$

επειδή $d^2 = 0$, οπότε η R_X μετατίθεται με την d. Τελικά επειδή

$$i(X)(\alpha \wedge \beta) = i(X)\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i(X)\beta$$

και

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$

παίρνουμε

$$R_X(\alpha \wedge \beta) = (R_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge R_X(\beta).$$

Από την άλλη μεριά όμως

$$\phi_t^*(d\alpha) = d(\phi_t^*\alpha)$$

οπότε διαφορίζοντας στο $t = 0$ παίρνουμε

$$L_X d\alpha = d(L_X\alpha)$$

και

$$\phi_t^*(\alpha \wedge \beta) = \phi_t^*\alpha \wedge \phi_t^*\beta$$

και διαφορίζοντας την τελευταία παίρνουμε

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X\beta).$$

Συνεπώς και η L_X και η R_X διατηρούν τον βαθμό της μορφής, μετατίθενται με την d και ικανοποιούν την ταυτότητα Leibniz οπότε εάν γράψουμε μια p-μορφή ως

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

οι διαφορικοί τελεστές L_X και R_X θα συμφωνούν εφόσον συμφωνούν στις συναρτήσεις (0-μορφές). Όμως

$$R_X f = i(X)df = X(f) = \frac{\partial}{\partial t} f(\phi_t)|_{t=0} = L_X f$$

οπότε είναι πράγματι ίσοι. $\square$

6.6 Συνομολογία de Rham

Στα βιβλία διανυσματικής ανάλυσης ίσως έχετε διαβάσει όχι μόνο για την γνωστή ιδιότητα $curl(gradf) = 0$ αλλά επίσης ότι εάν ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{a}$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$ (δηλαδή $curl\vec{a} = 0$) τότε υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση f (που δεν είναι μοναδική) τέτοια ώστε $\vec{a} = \vec{\nabla} f$ (δηλαδή $\vec{a} = gradf$). Στα καλά βιβλία αναφέρεται πως η προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτό είναι το ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ στο οποίο ορίζεται το $\vec{a}$ πρέπει να είναι *απλά συνεκτικό*, δηλαδή κάθε κλειστή τροχιά θα πρέπει να μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο (που αποτελεί τοπολογική συνθήκη).

Στη γλώσσα των διαφορικών μορφών σε μια πολλαπλότητα, η ανάλογη δήλωση θα λέει ότι εάν μια 1-μορφή α ικανοποιεί την ιδιότητα $d\alpha = 0$ και η M είναι απλά συνεκτική τότε υπάρχει κάποια συνάρτηση f τέτοια ώστε $df = \alpha$.

Η παραπάνω πρόταση είναι βεβαίως ορθή αλλά η συνθήκη η M να είναι απλά συνεκτική είναι πολύ ισχυρή. Θέλουμε να γνωρίζουμε πότε ο *πυρήνας* της εξωτερικής παραγώγου d που αποτελεί γραμμική απεικόνιση

$$d : \Omega^1(M) \to \Omega^2(M)$$

είναι ίσος με την *εικόνα* της

$$d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M).$$

Αφού $d^2 f = 0$, ο δεύτερος διανυσματικός χώρος περιέχεται στον πρώτο και αυτό που θα κάνουμε στη συνέχεια είναι να μελετήσουμε το πηλίκο που αποτελεί το ίδιο ένα νέο τοπολογικό αντικείμενο με μια αλγεβρική δομή που μπορεί να αποκαλύψει πολλά για την ολική τοπολογία της πολλαπλότητας M. Τα παρακάτω οφείλονται εν πολλοίς στην διαίσθηση και την μεγαλοφυϊα ενός εκ των μεγαλυτέρων μαθηματικών του 20ου αιώνα, (για πολλούς, και για τον γράφοντα, του μεγαλύτερου), του Henri Poincare:

Ορισμός 24. Η *p-οστή ομάδα της συνομολογίας de Rham* μιας πολλαπλότητας M ορίζεται ως ο διανυσματικός χώρος πηλίκο

$$H^p(M) := \frac{Kerd : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)}{Imd : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)}.$$

Παρατηρήσεις:
1. Αν και την λέμε *ομάδα* της συνομολογίας, στην πραγματικότητα αποτελεί πραγματικό διανυσματικό χώρο. Η ορολογία προέρχεται από την Αλγεβρική

Τοπολογία όπου η δομή προσθετικής ομάδας έχει το περισσότερο ενδιαφέρον.

2. Επειδή δεν υπάρχουν μορφές βαθμού -1, η ομάδα $H^0(M)$ αποτελείται από το σύνολο των συναρτήσεων f με την ιδιότητα $df = 0$. Τώρα κάθε συνεκτικό κομμάτι M_i της M αποτελεί ανοικτό υποσύνολο της M και άρα επίσης (υπο)πολλαπλότητα. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής μας λέει πως σε κάθε ανοικτή μπάλα σε μια γειτονιά συντεταγμένων της M_i, η σχέση $df = 0$ συνεπάγεται ότι η f είναι ίση με μια σταθερά c και το υποσύνολο της M_i στο οποίο η $f = c$ είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό οπότε ταυτίζεται με το M_i.

Συνεπώς εάν η M είναι συνεκτική, η ομάδα $H^0(M)$ της συνομολογίας de Rham είναι ισόμορφη με φυσικό τρόπο με το $\mathbb{R}$, τις σταθερές τιμές c της συνάρτησης f. Εν γένει η ομάδα $H^0(M)$ είναι ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων με πραγματικές τιμές στο σύνολο των συνεκτικών κομματιών της M. Η υπόθεση ότι η M έχει αριθμήσιμη βάση από ανοικτά σύνολα σημαίνει ότι υπάρχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος συνεκτικών κοματιών. Όταν η M είναι συμπαγής, υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος συνεκτικών κομματιών αφού τα συνεκτικά κομμάτια αποτελούν μια ανοικτή κάλυψη. Μια βασική πρόταση λέει πως:

Οι συνομολογιακές ομάδες μιας συμπαγούς πολλαπλότητας αποτελούν διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης,

αλλά αυτό δεν θα το αποδείξουμε εδώ.

Είναι βολικό όταν μελετάμε την εξωτερική παράγωγο να εισαγάγουμε την παρακάτω ορολογία:

Ορισμός 25. Μια διαφορική μορφή $\alpha \in \Omega^p(M)$ λέγεται *κλειστή* εάν $d\alpha = 0$.

Ορισμός 26. Μια διαφορική μορφή $\alpha \in \Omega^p(M)$ λέγεται *ακριβής* εάν $\alpha = d\beta$ για κάποια διαφορική μορφή $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$.

Η συνομολογιακή ομάδα de Rham $H^p(M)$ συνεπώς είναι εξ ορισμού ο χώρος πηλίκο των κλειστών p-μορφών διά τον υπόχωρο των ακριβών p-μορφών. Υπό την απεικόνιση πηλίκο, μια κλειστή p-μορφή α ορίζει μια συνομολογιακή κλάση $[\alpha] \in H^p(M)$ και $[\alpha'] = [\alpha] \Leftrightarrow \alpha' - \alpha = d\beta$ για κάποια μορφή β.

Στην παρακάτω πρόταση συγκεντώνουμε τις βασικές ιδιότητες των ομάδων της συνομολογίας de Rham:

Πρόταση 6.6 Οι ομάδες της συνομολογίας de Rham μιας πολλαπλότητας M διάστασης n έχουν τις εξής ιδιότητες:

• $H^p(M) = 0$ εάν $p > n$

• γιά $a \in H^p(M), b \in H^q(M)$, υπάρχει ένα διγραμμικό γινόμενο $ab \in H^{p+q}(M)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$ab = (-1)^{pq} ba$$

• εάν $F : M \to N$ είναι μια λεία απεικόνιση, τότε αυτή ορίζει μια φυσική γραμμική απεικόνιση

$$F^* : H^p(N) \to H^p(M)$$

η οποία μετατίθεται με το γινόμενο.

Απόδειξη: Η πρώτη ιδιότητα είναι προφανής διότι $\Lambda^p T^* = 0$ για $p > n$.

Για το γινόμενο, η ιδιότητα προκύπτει άμεσα από το εξωτερικό γινόμενο των μορφών. Εάν $a = [\alpha]$ και $b = [\beta]$, ορίζουμε

$$ab = [\alpha \wedge \beta]$$

αλλά θα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι ορίζεται μια συνομολογιακή κλάση. Κατ' αρχή, αφού οι α και β είναι κλειστές,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta = 0,$$

οπότε η $\alpha \wedge \beta$ πράγματι ορίζει μια συνομολογιακή κλάση. Υποθέτουμε στη συνέχεια πως επιλέγουμε έναν διαφορετικό αντιπρόσωπο $\alpha' = \alpha + d\gamma$ για την κλάση a. Τότε

$$\alpha' \wedge \beta = (\alpha + d\gamma) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + d(\gamma \wedge \beta)$$

αφού $d\beta = 0$ οπότε $d(\gamma \wedge \beta) = d\gamma \wedge \beta$. Συνεπώς οι $\alpha' \wedge \beta$ $\alpha \wedge \beta$ διαφέρουν κατά μια ακριβή μορφή οπότε ορίζουν την ίδια συνομολογιακή κλάση. Αλλάζοντας αντιπρόσωπο της β παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Η τελευταία ιδιότητα είναι απλά το τράβηγμα-πίσω των μορφών. Αφού

$$dF^*\alpha = F^* d\alpha,$$

η F^* ορίζει μια απεικόνιση μεταξύ συνομολογιακών ομάδων και επειδή

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta,$$

η F σέβεται το γινόμενο. $\square$

Ίσως η πιο σημαντική ιδιότητα της συνομολογίας de Rham, και σίγουρα η ιδιότητα που την συσχετίζει με την αλγεβρική τοπολογία, είναι ότι είναι αναλλοίωτη κάτω από διαταραχές (deformations) των επαγόμενων απεικονίσεων F. Θα αποδείξουμε πως εάν η F_t είναι μια λεία οικογένεια λείων απεικονίσεων, τότε η επίδραση στην συνομολογία είναι ανεξάρτητη της τιμής της παραμέτρου t (γιά όσους είναι εξοικειωμένοι με την αλγεβρική τοπολογία, αυτό που λέμε είναι πως η συνομολογία de Rham είναι ανεξάρτητη από ομοτοπίες). Επείδή όμως ασχολούμαστε με λείες πολλαπλότητες, οι ορισμοί της αλγεβρικής τοπολογίας χρειάζονται κάποιες μικρές τροποποιήσεις: Θα λέμε ότι μια απεικόνιση

$$F : M \times [a, b] \to N$$

είναι λεία εάν αποτελεί τον περιορισμό μιας λείας απεικόνισης στο γινόμενο με κάποιο ελαφρά μεγαλύτερο ανοικτό διάστημα $M \times (a - \epsilon, b + \epsilon)$.

Θεώρημα 6.7 Έστω $F : M \times [0, 1] \to N$ μια λεία απεικόνιση. Θέτουμε $F_t(x) = F(t, x)$ και θεωρούμε την επαγόμενη απεικόνιση στις αντίστοιχες συνομολογίες de Rham, $F_t^* : H^p(N) \to H^p(M)$. Τότε

$$F_1^* = F_0^*.$$

Απόδειξη: Αναπαριστούμε την $a \in H^p(N)$ με μια κλειστή p-μορφή α και θεωρούμε την τραβηγμένη-πίσω μορφή $F^*\alpha$ στο $M \times [0, 1]$. Μπορούμε να την αναλύσουμε με μοναδικό τρόπο ως

$$F^*\alpha = \beta + dt \wedge \gamma$$

όπου η β είναι μια επίσης p-μορφή στην M (που επίσης εξαρτάται από την t) και η γ είναι μια $(p - 1)$-μορφή στην M που εξαρτάται από την t. Σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων είναι φανερό πως γίνεται αυτό αλλά με αναλλοίωτο τρόπο (δηλαδή ανεξάρτητα από σύστημα συντεταγμένων) η μορφή β είναι απλά $F_t^*\alpha$. Για να πάρουμε την γ με αναλλοίωτο τρόπο μπορούμε να σκεφτούμε ότι τα

$$(x, s) \mapsto (x, s + t)$$

δίδουν μια μονοπαραμετρική ομάδα διαφορομορφισμών του $M \times (a, b)$ που παράγει ένα διανυσματικό πεδίο $X = \partial/\partial t$. Τότε

$$\gamma = i(X)F^*\alpha.$$

Τώρα η α είναι κλειστή οπότε από την

$$F^*\alpha = \beta + dt \wedge \gamma$$

παίρνουμε

$$0 = d_M\beta + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} - dt \wedge d_M\gamma,$$

όπου d_M η εξωτερική παράγωγος στις μεταβλητές της M. Έπεται ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t^*\alpha = \frac{\partial \beta}{\partial t} = d_M\gamma,$$

οπότε ολοκληρώνοντας ως προς t παίρουμε

$$F_1^*\alpha - F_0^*\alpha = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_t^*\alpha dt = d\int_0^1 \gamma dt.$$

Άρα οι κλειστές μορφές $F_1^*\alpha$ και $F_0^*\alpha$ διαφέρουν κατά μια ακριβή μορφή οπότε ορίζουν την ίδια συνομολογιακή κλάση

$$F_1^*(a) = F_0^*(a).$$

□

Ένα άμεσο πόρισμα είναι το παρακάτω:

Πρόταση 6.8 Οι συνομολογιακές ομάδες de Rham της $M = \mathbb{R}^n$ είναι μηδέν για $p > 0$.

Απόδειξη: Ορίζουμε την $F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ μέσω την σχέσης

$$F(x,t) = tx.$$

Τότε $F_1(x) = x$, που είναι η ταυτοτική απεικόνιση οπότε

$$F_1^* : H^p(\mathbb{R}^n) \to H^p(\mathbb{R}^n)$$

είναι επίσης η ταυτοτική απεικόνιση.

Αλλά $F_0(x) = 0$ που είναι μια σταθερή απεικόνιση. Πιο συγκεκριμένα η παράγωγος μηδενίζεται οπότε το τράβηγμα-πίσω οποιασδήποτε p-μορφής βαθμού μεγαλύτερου του μηδενός είναι η μεδενική απεικόνιση. Έτσι για $p > 0$ η

$$F_0^* : H^p(\mathbb{R}^n) \to H^p(\mathbb{R}^n)$$

μηδενίζεται.

Από το Θεώρημα 6.7 όμως έχουμε ότι $F_0^* = F_1^*$ από την οποία συνάγουμε πως οι ομάδες $H^p(\mathbb{R}^n)$ μηδενίζονται για $p > 0$. Επιπλέον αφού το $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό έπεται ότι $H^0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$. $\square$

Παράδειγμα: Δείξτε ότι η Πρόταση 6.8 ισχύει για ένα χωρίο με σχήμα αστεριού στον $\mathbb{R}^n$: ένα ανοικτό σύνολο U με ένα σημείο $a \in U$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in U$ το ευθύγραμμο τμήμα $\bar{ax} \subset U$. Η Πρόταση αυτή συνήθως αποκαλείται *λήμμα Poincare*.

Δεν είμαστε σε θέση ακόμη να υπολογίσουμε άλλες ομάδες συνομολογίας de Rham αλλά μπορούμε να αναφέρουμε ένα μη-τετριμμένο παράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ που είναι διαφορομορφικό με τον κύκλο S^1. Στον άτλαντα που περιγράψαμε προηγουμένως είχαμε $\phi_1\phi_0^{-1}(x) = x$ ή $\phi_1\phi_0^{-1}(x) = x - 1$ οπότε η 1-μορφή $dx = d(x-1)$ είναι καλά ορισμένη και πουθενά μηδέν. Όμως δεν αποτελεί την παράγωγο κάποιας συνάρτησης μιας και το $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ είναι συμπαγές και κάθε συνάρτηση πρέπει να έχει ένα ελάχιστο στα σημεία όπου $df = 0$. Συνάγουμε λοιπόν ότι

$$H^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \neq 0.$$

Για να αποσπάσουμε περισσότερες πληροφορίες θα πρέπει να μελετήσουμε και την άλλη όψη των διαφορικών μορφών που είναι η ολοκλήρωσή τους.

7 Ολοκλήρωση Διαφορικών Μορφών

7.1 Προσανατολισμός

Ξεκινάμε υπενθυμίζοντας την αλλαγή μεταβλητών σε ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα:

$$\int f(y_1, y_2, ..., y_n)dy_1dy_2...dy_n = \int f(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))|det(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})|dx_1dx_2...dx_n$$

και ας την συγκρίνουμε με την αλλαγή συντεταγμένων μιας n-μορφής σε μια πολλαπλότητα διάστασης n:

$$\theta = f(y_1, y_2, ..., y_n)dy_1 \wedge dy_2 \wedge ... \wedge dy_n =$$

$$= f(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \sum_i \frac{\partial y_1}{\partial x_i} dx_i \wedge ... \wedge \sum_p \frac{\partial y_n}{\partial x_p} dx_p =$$

$$= f(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))det(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Η μόνη διαφορά είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του Ιακωβιανού πίνακα, οπότε εάν βρούμε έναν συνεπή τρόπο καθορισμού του προσήμου, τότε θα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια ανεξάρτητη από συντεταγμένες τιμή στο ολοκλήρωμα μιας n-μορφής επί μιας πολλαπλότητας διάστασης n. Το θέμα λοιπόν του προσήμου είναι θέμα *προσανατολισμού* της πολλαπλότητας.

Ορισμός 27. Μια πολλαπλότητα M διάστασης n λέμε ότι είναι *προσανατολίσιμη* εάν διαθέτει μια n-μορφή ω που δεν μηδενίζεται πουθενά.

Ορισμός 28. Έστω M μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n. Ένας *προσανατολισμός* στην M είναι μια κλάση ισοδυναμίας από μη-μηδενικές n-μορφές ω, όπου $\omega \sim \omega'$ εάν $\omega' = f\omega$ με $f > 0$.

Φανερά μια συνεκτική προσανατολίσιμη πολλαπλότητα έχει δύο προσανατολισμούς: τις κλάσεις ισοδυναμίας $\pm\omega$.

Παραδείγματα:
1. Έστω το $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ που ορίζεται από την σχέση $f(x) = c$ με $df(a) \neq 0$ εάν $f(a) = c$. Από το Θεώρημα 2.2 το M αποτελεί πολλαπλότητα και επιπλέον εάν $\partial f/\partial x_i \neq 0$, τα $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, x_n$ αποτελούν τοπικές συντεταγμένες. Σε ένα τέτοιο κομμάτι του άτλαντα θεωρούμε την

$$\omega = (-1)^i \frac{1}{\partial f/\partial x_i} dx_1 \wedge ... \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge ... \wedge dx_n$$

που δεν μηδενίζεται πουθενά.

Τώρα η M ορίζεται μέσω της $f(x) = c$ οπότε στην M

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0$$

και εάν $\partial f/\partial x_j \neq 0$, τότε

$$dx_j = -\frac{1}{\partial f/\partial x_j}[(\partial f/\partial x_i)dx_i + ...].$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση ορισμού της ω και παίρνουμε

$$\omega = (-1)^j \frac{1}{\partial f/\partial x_j} dx_1 \wedge ... \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge ... \wedge dx_n.$$

Συνεπώς η ω είναι μια n-μορφή που δεν μηδενίζεται πουθενά ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε και άρα η M είναι προσανατολίσιμη.

Το προφανές παράδειγμα είναι η σφαίρα S^n διάστασης n με

$$\omega = (-1)^i \frac{1}{x_i} dx_1 \wedge ... \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge ... \wedge dx_n.$$

2. Θεωρούμε τον πραγματικό προβολικό χώρο $P(\mathbb{R}^{n+1})$ διάστασης n και έστω μια λεία απεικόνιση

$$p : S^n \to P(\mathbb{R}^{n+1})$$

που απεικονίζει ένα μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^{n+1}$ στον υπόχωρο διάστασης 1 που αυτό παράγει. Αναλυτικότερα, εάν $x_1 \neq 0$, χρησιμοποιούμε τις $x = (x_2, ..., x_{n+1})$ ως συντεταγμένες της S^n και τις συνήθεις ανομογενείς συντεταγμένες $(x_2/x_1, ..., x_{n+1}/x_1)$ στον $P(\mathbb{R}^{n+1})$ και τότε

$$p(x) = \frac{1}{1 - ||x||^2} x.$$

Έστω $\sigma : S^n \to S^n$ ένας διαφορομορφισμός με $\sigma(x) = -x$. Τότε

$$\sigma^*\omega = (-1)^i \frac{1}{-x_i} d(-x_1) \wedge ... \wedge d(-x_{i-1}) \wedge d(-x_{i+1}) \wedge ... \wedge d(-x_n) = (-1)^{n-1}\omega.$$

Έστω ότι ο $P(\mathbb{R}^{n+1})$ είναι προσανατολίσιμος, τότε θα έχει μια μη-μηδενική n-μορφή θ. Από την

$$p(x) = \frac{1}{1 - ||x||^2} x.$$

έπεται πως η παράγωγος της p είναι αντιστρέψιμη οπότε η $p^*\theta$ είναι μια μη-μηδενική n-μορφή στην S^n και έτσι

$$p^*\theta = f\omega,$$

για κάποια μη-μηδενική λεία συνάρτηση f. Αλλά $p \circ \sigma = p$ οπότε

$$f\omega = p^*\theta = \sigma^* p^*\theta = (f \circ \sigma)(-1)^{n-1}\omega.$$

Συνεπώς εάν $n = 2m$ άρτιος, τότε

$$f \circ \sigma = -f$$

και εάν $f(a) > 0$, τότε $f(-a) < 0$. Αλλά $P(\mathbb{R}^{n+1}) = p(S^n)$ και η S^n είναι συνεκτική οπότε το $P(\mathbb{R}^{n+1})$ είναι επίσης συνεκτικό. Αυτό σημαίνει ότι η f θα πρέπει να μηδενίζεται κάπου, κάτι που αποτελεί αντίφαση.

Συνεπώς το $P(\mathbb{R}^{2m+1})$ δεν είναι προσανατολίσιμο. (Υπενθυμίζουμε πως στην γεωμετρία επιφανειών είχαμε δει ότι η επιφάνεια Boy που αποτελεί το πραγματικό προβολικό επίπεδο, δηλαδή $n = 2$, δεν είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια).

Η προσανατολισιμότητα βοηθά την ολοκλήρωση των διαφορικών μορφών μέσω της επόμενης:

Πρόταση 7.1 Μια πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη εάν και μόνον εάν καλύπτεται από χάρτες συντεταγμένων με την ιδιότητα

$$det(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}) > 0$$

στις τομές.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πως η M είναι προσανατολίσιμη και έστω ω μια n-μορφή που δεν μηδενίζεται πουθενά. Σε ένα χάρτη συντεταγμένων

$$\omega = f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Μετά πιθανώς από μια αλλαγή συντεταγμένων $x_1 \mapsto c - x_1$, έχουμε συντεταγμένες τέτοιες ώστε $f > 0$.

Ας δούμε δύο τέτοιες αλληλοεπικαλυπτόμενες συντεταγμένες. Τότε

$$\omega = g(y_1, y_2, ..., y_n)dy_1 \wedge dy_2 \wedge ... \wedge dy_n =$$

$$= g[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)][det(\frac{\partial y_j}{\partial x_i})]dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n =$$

$$= f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Αφού $f > 0$ και $g > 0$, η ορίζουσα

$$det(\frac{\partial y_j}{\partial x_i})$$

είναι επίσης θετική.

Αντιστρόφως, έστω ότι έχουμε τέτοιες συντεταγμένες. Παίρνουμε μια διαμέριση της μονάδας $\{\phi_a\}$ υποτεταγμένη στην κάλυψη των συντεταγμένων αυτών και θέτουμε

$$\omega = \sum \phi_a dy_1^a \wedge dy_2^a \wedge ... \wedge dy_n^a.$$

Τότε σε μια γειτονιά συντεταγμένων U_b με συντεταγμένες $x_1, x_2, ..., x_n$ έχουμε

$$\omega|_{U_b} = \sum \phi_a[det(\frac{\partial y_i^a}{\partial x_j})]dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Αφού $\phi_a \geq 0$ και

$$det(\frac{\partial y_i^a}{\partial x_j}) > 0,$$

η ω δεν μηδενίζεται πουθενά. $\square$

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η M είναι προσανατολίσιμη και έχουμε επιλέξει έναν προσανατολισμό. Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_M \theta$$

για οποιαδήποτε n-μορφή θ με συμπαγές υποστήριγμα στην πολλαπλότητα M.

Αρχικά επιλέγουμε μια κάλυψη συντεταγμένων όπως στην Πρόταση 7.1. Σε κάθε γειτονιά συντεταγμένων U_a έχουμε

$$\theta|_{U_a} = f_a(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Παίρνουμε μια διαμέριση της μονάδας ϕ_i υποτεταγμένη σε αυτή την κάλυψη. Τότε

$$\phi_i\theta|_{U_a} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n,$$

όπου η g_i είναι μια λεία συνάρτηση με συμπαγές υποστήριγμα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$. Στην συνέχεια *ορίζουμε*

$$\int_M \theta := \sum_i \int_M \phi_i \theta = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

Παρατηρήστε ότι αφού η θ έχει συμπαγές υποστήριγμα, το υποστήριγμά της καλύπτεται από πεπερασμένα σε πλήθος ανοικτά σύνολα στα οποία $\phi_i \neq 0$, οπότε το παραπάνω είναι ένα άθροισμα με πεπερασμένο πλήθος όρων.

Το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο ακριβώς εξαιτίας του τύπου αλλαγής μεταβλητών στην ολοκλήρωση και της συνεπούς επιλογής προσήμου από τον προσανατολισμό της πολλαπλότητας M.

7.2 Το Θεώρημα Stokes και το Θεώρημα Brouwer

Τα γνωστά από την διανυσματική ανάλυση Θεωρήματα Stokes και Green αποτελούν ειδικές περιπτώσεις ενός και μόνου αποτελέσματος της θεωρίας των διαφορικών μορφών το οποίο κατά συνθήκη ονομάζεται και αυτό Θεωρήμα Stokes. Αρχίζουμε με μια απλή εκδοχή αυτού:

Θεώρημα 7.2 Έστω M μια συμπαγής, προσανατολίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n και έστω ότι η $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ έχει συμπαγές υποστήριγμα. Τότε

$$\int_M d\omega = 0.$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε μια διαμέριση της μονάδας υποτεταγμένη σε μια κάλυψη συντεταγμένων για να γράψουμε

$$\omega = \sum \phi_i \omega.$$

Τότε σε μια γειτονιά συντεταγμένων

$$\phi_i \omega = a_1 dx_2 \wedge ... \wedge dx_n - a_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge ... \wedge dx_n + ...$$

και

$$d(\phi_i \omega) = (\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος χρειάζεται να αθροίσουμε όρους της μορφής

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}) dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 ... dx_n,$$

το οποίο μέσω του Θεωρήματος Fubini το υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} ... (\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1) dx_2 ... dx_n.$$

Παίρνουμε το απλό ολοκλήρωμα εντός της παρενθέσεως: η a_1 έχει συμπαγές υποστήριγμα οπότε μηδενίζεται εάν $|x_1| \geq N$ οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 = [a_1]_{-N}^{N} = 0.$$

Με τον ίδιο τρόπο μηδενίζονται και όλοι οι υπόλοιποι όροι. □

Το Θεώρημα 7.2 έχει ένα άμεσο Πόρισμα που αφορά την συνομολογία de Rham:

Πρόταση 7.3 Έστω M μια συμπαγής, προσανατολίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n. Τότε η ομάδα συνομολογίας de Rham $H^n(M)$ είναι μη-μηδενική.

Απόδειξη: Αφού η M είναι προσανατολίσιμη έχει μια μη-μηδενική n-μορφή θ. Επειδή δεν υπάρχουν $(n+1)$-μορφές, αναγκαστικά η θ είναι κλειστή οπότε ορίζει μια συνομολογιακή κλάση $[\theta] \in H^n(M)$.

Επιλέγουμε τον προσανατολισμό που ορίζεται από την θ και ολοκληρώνουμε: θα πάρουμε

$$\int_M \theta = \sum \int f_i dx_1 dx_2 ... dx_n,$$

ποσότητα που είναι παντού θετική διότι κάθε $f_i \geq 0$ και είναι κάπου θετική.

Τώρα εάν η συνομολογιακή κλάση $[\theta] = 0$, τότε $\theta = d\omega$ αλλά τότε το Θεώρημα 7.2 δίδει

$$\int_M \theta = \int_M d\omega = 0,$$

που αποτελεί αντίφαση. □

Παραθέτουμε στη συνέχεια ένα τοπολογικό αποτέλεσμα που προκύπτει άμεσα από την παραπάνω απόδειξη:

Θεώρημα 7.4 Κάθε διανυσματικό πεδίο σε μια σφαίρα άρτιας διάστασης S^{2m} μηδενίζεται σε κάποιο σημείο.

Απόδειξη: (Με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής:) Έστω ότι υπάρχει ένα μη-μηδενικό διανυσματικό πεδίο. Για τη σφαίρα S^{2m} (που θεωρούμε πως είναι εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^{2m+1}$), μπορούμε να σκεφτούμε ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο ως μια λεία απεικόνιση

$$v : S^{2m} \to \mathbb{R}^{2m+1}$$

έτσι ώστε $(x, v(x)) = 0$ και εάν το v είναι μη-μηδενικό μπορούμε να το κανονικοποιήσουμε έτσι ώστε να είναι μοναδιαίο, οπότε υποθέτουμε ότι το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^{2m+1}$ δίδει $(v(x), v(x)) = 1$.

Τώρα ορίζουμε την $F_t : S^{2m} \to \mathbb{R}^{2m+1}$ ως ακολούθως:

$$F_t(x) = \cos tx + \sin tv(x).$$

Αφού $(x, v(x)) = 0$, έχουμε πως το εσωτερικό γινόμενο

$$(\cos tx + \sin tv(x), \cos tx + \sin tv(x)) = 1,$$

οπότε η F_t απεικονίζει την μοναδιαία σφαίρα στον εαυτό της. Επιπλέον

$$F_0(x) = 0$$

και

$$F_\pi(x) = -x.$$

Τώρα έστω ω η μορφή που δίδει τον στάνταρ προσανατολισμό στην S^{2m}:

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{2m}/x_{2m+1}.$$

Βλέπουμε ότι

$$F_0^*\omega = \omega$$

ενώ

$$F_\pi^*\omega = -\omega.$$

Αλλά από το Θεώρημα 6.7 οι απεικονίσεις F_0^* και F_π^* στο $H^{2m}(S^{2m})$ είναι ίσες. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνομολογιακή κλάση de Rham της ω είναι ίση με την αρνητική της οπότε θα πρέπει να μηδενίζεται. Όμως αυτό είναι άτοπον

διότι το ολοκλήρωμά της είναι θετικό. Συνεπώς το διανυσματικό πεδίο θα πρέπει κάπου να μηδενίζεται. $\square$

Το Θεώρημα Green (ή Gauss) σχετίζει ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα με ένα ολοκλήρωμα όγκου και το Θεώρημα Stokes σε πλήρη γενικότητα κάνει κάτι αντίστοιχο στις πολλαπλότητες. Οι πολλαπλότητες που έχουμε ορίσει είναι ανάλογες των επιφανειών, η σφαίρα για παράδειγμα. Στη συνέχεια θα πρέπει να βρούμε το αντίστοιχο της στερεάς μπάλας της οποίας το σύνορο είναι η σφαιρική επιφάνεια. Αυτές λέγονται επίσης πολλαπλότητες αλλά *πολλαπλότητες με σύνορο.*

Ορισμός 29. Μια *πολλαπλότητα διάστασης n με σύνορο* είναι ένα σύνολο M μαζί με μια συλλογή υποσυνόλων U_a και απεικονίσεων

$$\phi_a : U_a \to \mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

τέτοιων ώστε:

- $M = \bigcup_a U_a$

- η $\phi_a : U_a \to \phi_a(U_a)$ αποτελεί αμφεικόνιση επί ενός ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n_+$ και το $\phi_a(U_a \cap U_b)$ είναι ανοικτό για κάθε a, b

- η $\phi_b\phi_a^{-1} : \phi_a(U_a \cap U_b) \to \phi_b(U_a \cap U_b)$ αποτελεί τον περιορισμό μιας C^∞ απεικόνισης από μια γειτονιά του $\phi_a(U_a \cap U_b) \subseteq \mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^n$.

Το *σύνορο* ∂M της M ορίζεται ως εξής:

$$\partial M := \{x \in M : \phi_a(x) \in \{(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n\}$$

και αυτοί οι χάρτες ορίζουν την δομή μιας πολλαπλότητας διάστασης $(n-1)$ στο σύνορο ∂M της M.

Παραδείγματα:
1. Το πρώτυπο μιας πολαπλότητας διάστασης n με σύνορο είναι το ίδιο το $\mathbb{R}^n_+$ με σύνορο το σύνολο $x_n = 0$ που αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης $(n-1)$.

2. Η μοναδιαία μπάλα $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης n με σύνορο όπου το σύνορο είναι η σφαίρα S^{n-1} διάστασης $(n-1)$.

3. Η δέσμη Möbius που είχαμε δει και στην γεωμετρία επιφανειών (μη προσανατολίσιμη επιφάνεια) αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης 2 με σύνορο και το

σύνορό της είναι ο κύκλος S^1.

4. Ο κύλινδρος $I \times S^1$ αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης 2 με σύνορο. Το σύνορο αποτελείται από την ένωση δύο κύκλων (των βάσεων), φανερά το σύνορο αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης 1 (καμπύλη) που δεν είναι συνεκτική, αποτελείται από δύο ξένα σύνολα.

Μπορούμε εύκολα να ορίσουμε διαφορικές μορφές κλπ και σε πολλαπλότητες με σύνορο. Τοπικά θα αποτελούν περιορισμούς λείων διαφορικών μορφών από κάποιο ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$ σε κάποιο ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^n_+$. Μια μορφή στην M περιορίζεται σε μια μορφή στο σύνορό της.

Πρόταση 7.5 Εάν μια πολλαπλότητα με σύνορο M είναι προσανατολίσιμη, υπάρχει επαγόμενος προσανατολισμός στο σύνορό της.

Απόδειξη: Επιλέγουμε τοπικά συστήματα συντεταγμένων τέτοια ώστε το σύνορο ∂M ορίζεται από την $x_n = 0$ και $det(\partial y_i/\partial x_j) > 0$. Συνεπώς στις αλληλοεπικαλυπτόμενες γειτονιές θα έχουμε

$$y_i = y_i(x_1, x_2, ..., x_n)$$

και

$$y_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = 0.$$

Τότε ο Ιακωβιανός πίνακας θα έχει τη μορφή

$$J = \begin{pmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 & ... & \partial y_1/\partial x_n \\ \partial y_2/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_2 & ... & \partial y_2/\partial x_n \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \partial y_n/\partial x_n \end{pmatrix}.$$

Από τον ορισμό της πολλαπλότητας με σύνορο η $\phi_b\phi_a^{-1}$ απεικονίζει το $x_n > 0$ στο $y_n > 0$ οπότε το y_n έχει την ιδιότητα εάν $x_n = 0$ τότε $y_n = 0$ και εάν $x_n > 0$ τότε $y_n > 0$. Έπεται λοιπόν ότι

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_n}|_{x_n=0} > 0.$$

Από την μορφή του Ιακωβιανού πίνακα προκύπτει πως η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα για το σύνορο ∂M θα δίδεται από τη σχέση

$$det(J_{\partial M})\frac{\partial y_n}{\partial x_n}|_{x_n=0} = det(J_M),$$

οπότε εάν $det(J_M) > 0$, τότε και $det(J_{\partial M}) > 0$ επίσης. $\square$

Παρατήρηση: Το σύνορο μιας προσανατολίσιμης πολλαπλότητας έχει έναν επαγόμενο προσανατολισμό αλλά υπάρχει μια σύμβαση που συνήθως ακολουθείται για το πρόσημο της αντίστοιχης διαφορικής μορφής: για μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ αυτή είναι η επιλογή ενός καθέτου διανύσματος προς τα μέσα ή προς τα έξω. Εδώ η επιλογή μας θα είναι η εξής: εάν η $dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$ ορίζει έναν προσανατολισμό στην M και η $x_n \geq 0$ ορίζει το σύνορο ∂M της M τοπικά, τότε η $-dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1}$ (που στην περίπτωση επιφανειών του $\mathbb{R}^3$ αντιστοιχεί στο κάθετο προς τα έξω) δίδει τον επαγόμενο προσανατολισμό στο ∂M. Για παράδειγμα η παραπάνω σύμβαση στο σύνορο του κυλίνδρου δίδει αντίθετο προσανατολισμό στους δύο κύκλους των βάσεων ενώ η δέσμη Möbius είναι φυσικά μη-προσανατολίσιμη αλλά το σύνορό της που είναι κύκλος είναι προσανατολίσιμο.

Τώρα είμαστε σε θέση να αναφέρουμε το Θεώρημα Stokes σε πλήρη γενικότητα:

Θεώρημα 7.6 (*Θεώρημα Stokes*) Έστω M μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n με σύνορο ∂M και έστω $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ μια διαφορική μορφή με συμπαγές υποστήριγμα. Τότε χρησιμοποιώντας τον επαγόμενο προσανατολισμό ισχύει το παρακάτω:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Απόδειξη: Γράφουμε και πάλι

$$\omega = \sum_i \phi_i \omega$$

και τότε

$$\int_M d\omega = \sum_i \int_M d(\phi_i \omega).$$

Εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη της προηγούμενη έκδοσης (Θεώρημα 7.2) αλλά τώρα υπάρχουν δύο είδη ανοικτών υποσυνόλων. Για αυτά που δεν τέμνουν το σύνορο ∂M το ολοκλήρωμα μηδενίζεται από το Θεώρημα 7.2. Για αυτά που τέμνουν το σύνορο, έχουμε:

$$\int_M d(\phi_i \omega) = -\int_{x_n \geq 0} (\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}) dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

$$= -\int [a_n]_0^\infty dx_1 dx_2 ... dx_{n-1} = \int_{\partial M} \phi_i \omega.$$

□

Ένα άμεσο Πόρισμα του Θεωρήματος Stokes είναι το παρακάτω κλασικό αποτέλεσμα που στην βιβλιογραφία αναφέρεται συνήθως ως το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer:

Θεώρημα 7.7 (*Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer*). Έστω B η μοναδιαία μπάλα $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ και έστω $F : B \to B$ μια λεία απεικόνιση από την B στον εαυτό της. Τότε η F έχει ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει σταθερό σημείο, δηλαδή $F(x) \neq x, \forall x \in B$. Επεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $F(\bar{x})x$ μέχρι να τμήσει την σφαίρα $S^{n-1} = \partial B$, σύνορο της μπάλας B, έστω στο σημείο $f(x)$. Έτσι αποκτάμε μια λεία συνάρτηση

$$f : B \to \partial B$$

η οποία εάν $x \in \partial B$, τότε $f(x) = x$.

Έστω τώρα ω η στάνταρ μη-μηδενική $(n-1)$-μορφή στην $S^{n-1} = \partial B$ με

$$\int_{\partial B} \omega = 1.$$

Τότε

$$1 = \int_{\partial B} \omega = \int_{\partial B} f^* \omega$$

αφού η f είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο σύνορο $S^{n-1} = \partial B$. Αλλά τότε από το Θεώρημα Stokes θα έχουμε:

$$\int_{\partial B} f^* \omega = \int_B d(f^* \omega) = \int_B f^*(d\omega) = 0,$$

αφού $d\omega = 0$ καθώς η ω είναι $(n-1)$-μορφή στην S^{n-1} (κορυφαία διάσταση).

Καταλήξαμε φυσικά σε Άτοπο, $1 = 0$, άρα η F θα πρέπει να έχει (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο. □

8 Ο Βαθμός μιας Λείας Απεικόνισης

Χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση των διαφορικών μορφών είδαμε πως για μια προσανατολίσιμη, συμπαγή πολλαπλότητα διάστασης n, η ομάδα $H^n(M)$ της συνομολογίας de Rham είναι μη-μηδενική και το αποτέλεσμα αυτό μας έδωσε την δυνατότητα να αποδείξουμε μερικά ολικά τοπολογικά αποτελέσματα για αυτές τις πολλαπλότητες. Τώρα θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά αυτό το αποτέλεσμα και θα αποδείξουμε ότι η ομάδα $H^n(M)$ της συνομολογίας de Rham (για συμπαγείς, συνεκτικές, προσανατολίσιμες πολλαπλότητες) *έχει διάσταση* 1. Έτσι θα αποκτήσουμε μια συγκεκριμένη μέθοδο για να καθορίζουμε την συνομολογιακή κλάση μιας n-μορφής: μια n-μορφή θα είναι ακριβής εάν και μόνον εάν το ολοκλήρωμά της πάνω στην πολλαπλότητα είναι μηδέν.

8.1 Η Συνομολογία de Rham στην Κορυφαία Διάσταση

Ξεκινάμε με ένα τεχνικό Λήμμα:

Λήμμα 8.1 Έστω $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < 1\}$ και έστω $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ μια μορφή με υποστήριγμα στο U^n τέτοια ώστε

$$\int_{U^n} \omega = 0.$$

Τότε υπάρχει μορφή $\beta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ με υποστήριγμα στο U^n τέτοια ώστε $\omega = d\beta$.

Απόδειξη: Η Απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στην διάσταση n αλλά με την επιπρόσθετη υπόθεση στην επαγωγή ότι οι ω και β εξαρτώνται με λείο τρόπο από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}^m$ και επίσης υποθέτουμε πως εάν η ω μηδενίζεται εκ ταυτότητος για κάποιο λ, το ίδιο συμβαίνει και στην β.

Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση $n = 1$, οπότε $\omega = f(x, \lambda)dx$. Φανερά παίρνοντας

$$\beta(x, \lambda) = \int_{-1}^{x} f(u, \lambda)du,$$

αποκτάμε μια συνάρτηση με $d\beta = \omega$. Όμως επίσης αφού η f έχει υποστήριγμα στο U,

$$\int_{-1+\delta}^{1-\delta} f(u, \lambda)du = 0,$$

οπότε έχουμε $\beta(x,\lambda) = 0$ εάν $|x| > 1-\delta$ και η β έχει υποστήριγμα στο U. Εάν $f(x,\lambda) = 0\ \forall x$, τότε από την ολοκλήρωση

$$\beta(x,\lambda) = \int_{-1}^{x} f(u,\lambda)du,$$

το ίδιο θα ισχύει και για την $\beta(x,\lambda)$.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι ισχύει το αποτέλεσμα για διαστάσεις μικρότερες από n και έστω

$$\omega = f(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$$

η δοθείσα μορφή. Φιξάρουμε την τιμή $x_n = t$ και θεωρούμε την

$$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, t, \lambda)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1}$$

ως μια μορφή στο $\mathbb{R}^{n-1}$ που εξαρτάται με λείο τρόπο από τα t, λ. Το ολοκλήρωμά της δεν θα είναι πλέον μηδέν αλλά εάν σ είναι μια bump function στο U^{n-1} με ολοκλήρωμα 1, τότε θέτοντας

$$g(t,\lambda) = \int f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, t, \lambda)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1}$$

έχουμε μια νέα μορφή

$$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, t, \lambda)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1} - g(t,\lambda)\sigma$$

με υποστήριγμα στο U^{n-1} και ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν. Εφαρμόζουμε την επαγωγή σε αυτή οπότε μπορούμε να την γράψουμε ως $d\gamma$ όπου η γ έχει υποστήριγμα στο U^{n-1}.

Τώρα θέτουμε $t = x_n$ και θεωρούμε την $d(\gamma \wedge dx_n)$ Η x_n-παράγωγος της γ δεν συνεισφέρει στην εξωτερική παράγωγο εξ' αιτίας του παράγοντα dx_n οπότε παίρνουμε

$$d(\gamma \wedge dx_n) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, \lambda)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n - g(x_n,\lambda)\sigma \wedge dx_n.$$

Θέτοντας

$$\xi(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = (-1)^{n-1}[\int_0^{x_n} g(t,\lambda)dt]\sigma,$$

επίσης δίδει

$$d\xi = g(x_n,\lambda)\sigma \wedge dx_n.$$

Μπορούμε συνεπώς να γράψουμε

$$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, \lambda)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n = d(\gamma \wedge dx_n + \xi) = d\beta.$$

Τώρα εκ κατασκευής η β έχει υποστήριγμα στο $|x_i| < 1$ για $1 \leq i \leq n-1$, αλλά τι γίνεται με την x_n-διεύθυνση; Αφού η $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, t, \lambda)$ μηδενίζεται για $t > 1 - \delta$ ή για $t < -1 + \delta$, η υπόθεση της επαγωγής μας λέει πως το ίδιο ισχύει και για την γ για $x_n > 1 - \delta$. Τώρα σχετικά με την ξ, εάν $t > 1 - \delta$, τότε

$$\int_0^t g(s, \lambda)ds = \int_0^t [\int_{U^{n-1}} f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, t, \lambda)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1}]dt =$$

$$= \int_0^1 [\int_{U^{n-1}} f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, t, \lambda)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1}]dt =$$

$$= \int_{U^n} f(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n = 0$$

εξ' υποθέσεως. Συνεπώς το υποστήριγμα της ξ βρίσκεται εντός του U^n ενώ εάν παρατηρήσουμε τα ολοκληρώματα θα δούμε πως εάν η $f(x, \lambda)$ μηδενίζεται εκ ταυτότητος για κάποιο λ, το ίδιο θα ισχύει και για την β. $\square$

Χρησιμοποιώντας αυτό το Λήμμα είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 8.2 Εάν η M είναι μια συμπαγής, συνεκτική και προσανατολίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n, τότε $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Παίρνουμε μια κάλυψη από γειτονιές συντεταγμένων της M που παίρνουν τιμές στο $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < 1\}$ και μια αντίστοιχη διαμέριση της μονάδας $\{\phi_i\}$. Από την συμπάγεια της M μπορούμε να υποθέσουμε πως έχουμε ένα πεπερασμένο πλήθος ανοικτών συνόλων $U_1, U_2, ..., U_N$. Χρησιμοποιώντας μια bump function, φιξάρουμε μια n-μορφή α_0 με υποστήριγμα στο U_1 και

$$\int_M \alpha_0 = 1.$$

Συνεπώς από το Θεώρημα 7.3 η συνομολογιακή κλάση $[\alpha_0]$ είναι μη-μηδενική. Για να αποδείξουμε το Θεώρημά μας αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε n-μορφή α,

$$[\alpha] = c[\alpha_0],$$

δηλαδή $\alpha = c\alpha_0 + d\gamma$.

Δοθείσης της α, χρησιμοποιούμε την διαμέριση της μονάδας για να γράψουμε

$$\alpha = \sum \phi_i \alpha,$$

οπότε λόγω της γραμμικότητας αρκεί να δείξουμε το αποτέλεσμα για κάθε όρο $\phi_i \alpha$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το υποστήριγμα της α βρίσκεται σε μια γειτονιά συντεταγμένων U_m. Επειδή η M είναι συνεκτική μπορούμε να ενώσουμε τα σημεία $p \in U_1$ και $q \in U_m$ με μια τροχιά και από την συνεκτικότητα των ανοικτών διαστημάτων μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τροχιά καλύπτεται από μια ακολουθία των U_i, καθένα από τα οποία τέμνει το επόμενο, δηλαδή αλλάζοντας την αρίθμηση έχουμε

$$p \in U_1, U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset, q \in U_m.$$

Τώρα για $1 \leq i \leq m-1$ επιλέγουμε μια n-μορφή α_i με υποστήριγμα στο $U_i \cap U_{i+1}$ και ολοκλήρωμα 1. Στο U_1 έχουμε

$$\int (\alpha_0 - \alpha_1) = 0$$

οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 8.1 προκύπτει ότι υπάρχει μια μορφή β_0 με υποστήριγμα στο U_1 τέτοια ώστε

$$\alpha_0 - \alpha_1 = d\beta_1.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε

$$\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta_2$$

$$... = ...$$

$$\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1} = d\beta_{m-1}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\alpha_0 - \alpha_{m-1} = d(\sum_i \beta_i).$$

Στο U_m έχουμε

$$\int \alpha = c = \int c\alpha_{m-1}$$

και εφαρμόζοντας πάλι το Λήμμα 8.1 παίρνουμε $\alpha - c\alpha_{m-1} = d\beta$ οπότε από την

$$\alpha_0 - \alpha_{m-1} = d(\sum_i \beta_i).$$

παίρνουμε ότι

$$\alpha = c\alpha_{m-1} + d\beta = c\alpha_0 + d(\beta - c\sum_i \beta_i)$$

και το Θεώρημα αποδείχθηκε. $\square$

Το Θεώρημα 8.2 μας λέει ότι για οποιαδήποτε συμπαγή, συνεκτική, προσανατολίσιμη πολλαπλότητα M διάστασης n, η ομάδα $H^n(M)$ έχει διάσταση 1. Εάν επιλέξουμε μια n-μορφή ω_M της οποίας το ολοκλήρωμα πάνω στην M να είναι 1, τότε η κλάση $[\omega_M]$ αποτελεί την φυσική βάση της $H^n(M)$. Υποθέτουμε τώρα πως η

$$F : M \to N$$

είναι μια λεία απεικόνιση μεταξύ συμπαγών, συνεκτικών και προσανατολίσιμων πολλαπλοτήτων της ίδιας διάστασης n. Τότε υπάρχει η επαγόμενη απεικόνιση

$$F^* : H^n(N) \to H^n(M)$$

και ως προς την βάση που επιλέξαμε θα έχουμε

$$F^*[\omega_N] = k[\omega_M],$$

για κάποιον πραγματικό αριθμό k. Θα αποδείξουμε ότι ο k είναι ακέραιος:

Θεώρημα 8.3 Έστω M και N δύο συμπαγείς, συνεκτικές και προσανατολίσιμες πολλαπλότητες της ίδιας διάστασης n και έστω $F : M \to N$ μια λεία απεικόνιση. Τότε υπάρχει ένας ακέραιος, που λέγεται *βαθμός της* F, με τις εξής ιδιότητες:

- εάν $\omega \in \Omega^n(N)$, τότε

$$\int_M F^*\omega = degF \int_N \omega$$

- εάν a είναι μια κανονική τιμή της F, τότε

$$degF = \sum_{x \in F^{-1}(a)} sgn(detDF_x).$$

Σχόλια:

1. Μια *κανονική τιμή* μιας λείας απεικόνισης $F : M \to N$ είναι ένα σημείο $a \in N$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in F^{-1}(a)$, η παράγωγος DF_x είναι επί. Όταν $\dim M = \dim N$, αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος DF_x είναι αντιστρέψιμη. Το Θεώρημα Sard (που υπάρχει μαζί με την Απόδειξή του στο Παράρτημα στο

τέλος των σημειώσεων), μας λέει πως για κάθε λεία απεικόνιση τα περισσότερα σημεία στην N είναι κανονικές τιμές.

2. Η έκφραση $sgn(detDF_x)$ του Θεωρήματος επιδέχεται δύο ερμηνείες αλλά εξαρτάται βασικά από την έννοια του προσανατολισμού που δίδει το σωστό πρόσημο σε όλα τα σημεία $x \in F^{-1}(a)$. Η άμεση προσέγγιση χρησιμοποιεί την Πρόταση 7.1 που συσχετίζει σε έναν προσανατολισμό μια κλάση συντεταγμένων των οποίων οι Ιακωβιανοί πίνακες έχουν θετική ορίζουσα. Εάν η $detDF_x$ γραφτεί ως Ιακωβιανός πίνακας σε ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων για τις M και N, τότε το $sgn(detDF_x)$ είναι απλά το πρόσημο της ορίζουσας. Ανεξάρτητα από σύστημα συντεταγμένων όμως η παράγωγος $DF_x : T_xM \to T_aN$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\Lambda^n(DF'_x) : \Lambda T^*N_a \to \Lambda T^*_x M.$$

Οι προσανατολισμοί στις M και N ορίζονται από μη-μηδενικές n-μορφές ω_M και ω_N αντίστοιχα και

$$\Lambda^n(DF'_x)(\omega_N) = \lambda\omega_M.$$

Σε αυτή την περίπτωση το $sgn(detDF_x)$ είναι το πρόσημο του λ.

3. Παρατηρήστε ένα άμεσο Πόρισμα του Θεωρήματος: εάν η F δεν είναι επί, τότε $degF = 0$.

Απόδειξη: Για την πρώτη ιδιότητα, η συνομολογιακή κλάση της ω είναι $[\omega] = c[\omega_N]$, οπότε ολοκληρώνοντας (και χρησιμοποιώντας και την Πρόταση 7.2) παίρνουμε

$$\int_N \omega = c\int_N \omega_N = c.$$

Χρησιμοποιώντας τον αριθμό k της

$$F^*[\omega_N] = k[\omega_M],$$

θα πάρουμε

$$F^*[\omega] = cF^*[\omega_N] = ck[\omega_M]$$

και ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στην

$$\int_M F^*\omega = ck\int_M \omega_M = ck = k\int_N \omega.$$

Για την δεύτερη ιδιότητα, αφού η DF_x αποτελεί ισομορφισμό σε όλα τα σημεία του $F^{-1}(a)$, από το Θεώρημα 3.3 έπεται πως το $F^{-1}(a)$ αποτελεί πολλαπλότητα

διάστασης 0. Αφού είναι συμπαγές (κλειστό εντός του συμπαγούς χώρου M), αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος σημείων. Το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης αν εφαρμοστεί σε αυτό το πλήθος των m σημείων δίδει ότι υπάρχει μια γειτονιά συντεταγμένων U του $a \in N$ τέτοια ώστε το $F^{-1}(U)$ να αποτελεί την ξένη ένωση από m σε πλήθος ανοικτά σύνολα U_i τέτοια ώστε η

$$F : U_i \to U$$

να αποτελεί διαφορομορφισμό.

Έστω σ μια n-μορφή με υποστήριγμα στο U με $\int_N \sigma = 1$ και θεωρούμε τον διαφορομορφισμό $F : U_i \to U$. Τότε από την αναλοιώτητα του ολοκληρώματος των μορφών από συντεταγμένες και χρησιμοποιώντας τους προσανατολισμούς των M και N, παίρνουμε πως

$$\int_{U_i} F^*\sigma = sgnDF_{x_i} \int_U \sigma = sgnDF_{x_i}.$$

Συνεπώς αθροίζοντας θα πάρουμε

$$\int_M F^*\sigma = \sum_i sgnDF_{x_i}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$k = k \int_N \sigma = \int_M F^*\sigma$$

θα πάρουμε τελικά ότι

$$k = \sum_i sgnDF_{x_i}.$$

□

Παραδείγματα:

1. Έστω M το εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $M = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ το οποίο αποτελεί μια συμπαγή, συνεκτική και προσανατολίσιμη πολλαπλότητα (πραγματικής) διάστασης 2, στην πραγματικότητα (όπως είδαμε στην Προβολική Γεωμετρία) τοπολογικά είναι σφαίρα S^2 (πραγματικής) διάστασης 2. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : M \to M$ που ορίζεται ως

$$F(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + ... + a_k, z \neq \infty$$

και

$$F(\infty) = \infty$$

Η απεικόνιση αυτή είναι λεία διότι σε συντεταγμένες κοντά στο $z = \infty$ η F ορίζεται (για $w = 1/z$) από την

$$w \mapsto \frac{w^k}{1 + a_1 w + ... + a_k w^k}.$$

Για να βρούμε τον βαθμό της F, θεωρούμε την

$$F_t(z) = z^k + t(a_1 z^{k-1} + ... + a_k),$$

που επίσης αποτελεί λεία απεικόνιση για κάθε τιμή της παραμέτρου t. Από το Θεώρημα 6.7 η δράση της στην συνομολογία είναι ανεξάρτητη από το t οπότε

$$degF = degF_0$$

όπου $F_0(z) = z^k$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το βαθμό παίρνοντας μια 2-μορφή με $|z| = r$ και $z = x + iy$:

$$f(r)dx \wedge dy = f(r)rdr \wedge d\theta$$

υποθέτοντας ότι η $f(r)$ έχει συμπαγές υποστήριγμα. Τότε ο βαθμός θα είναι

$$degF_0 \int_{\mathbb{R}^2} f(r)rdr \wedge d\theta = \int_{\mathbb{R}^2} f(r^k)r^k d(r^k)kd\theta = k \int_{\mathbb{R}^2} f(r)rdr \wedge d\theta.$$

Συνεπώς $degF = k$. Εάν $k > 0$, αυτό σημαίνει ότι η F είναι επί και πιο συγκεκριμένα κάπου θα πρέπει αναγκαστικά να πάρει και την τιμή 0, δηλαδή με άλλα λόγια η εξίσωση

$$z^k + a_1 z^{k-1} + ... + a_k = 0$$

έχει τουλάχιστον μια λύση. Φυσικά θα αναγνωρίσατε ότι αυτό δεν είναι τίποτε άλλο παρά το *Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας!*

2. Θεωρούμε δύο απεικονίσεις $f_1, f_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$. Αυτές δίδουν δύο κύκλους στον $\mathbb{R}^3$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$F : S^1 \times s^1 \to S^2$$

από τη σχέση

$$F(s,t) = \frac{f_1(s) - f_2(t)}{||f_1(s) - f_2(t)||}.$$

Ο βαθμός αυτής της απεικόνισης λέγεται *αριθμός σύνδεσης (linking number)* των δύο κύκλων και αποτελεί το βασικό αναλοίωτο στη θεωρία κόμπων (knot

theory).

3. Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια συμπαγής επιφάνεια και $\vec{n}$ το μοναδιαίο κάθετο αυτής. Η *απεικόνιση Gauss* (που την είδαμε στην Γεωμετρία Επιφανειών) είναι η απεικόνιση

$$F : M \to S^2$$

που ορίζεται από τη σχέση

$$F(x) = \vec{n}(x).$$

Για να υπολογίσουμε τον βαθμό της F χρησιμοποιώντας ολοκλήρωμα, θεωρούμε την στάνταρ 2-μορφή ω στην S^2. Τότε βρίσκουμε πως

$$\int_M F^*\omega = \int_M K\sqrt{EG - F^2}dudv,$$

όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss της M. Ο βαθμός μας λέει ότι αυτό το ολοκλήρωμα είναι ίσο με 2π επί έναν ακέραιο. Από το Θεώρημα Gauss-Bonnet γνωρίζουμε πως ο ακέραιος αυτός είναι η χαρακτηριστική Euler της M.

9 Μετρικές Ρήμαν

Αναμφίβολα το πιο ενδιαφέρον κομμάτι της σύγχρονης γεωμετρίας που έχει οδηγήσει σε όλες σχεδόν τις μεγάλες ανακαλύψεις από το δεύτερο μισό του 20ου και εντεύθεν είναι η μελέτη της σχέσης τοπικών και ολικών (τοπολογικών) ιδιοτήτων των πολλαπλοτήτων. Οι διαφορικές μορφές και η εξωτερική παράγωγος αποτελούν φυσικά αντικείμενα των πολλαπλοτήτων (δηλαδή για να ορισθούν δεν χρειάζεται καμία επιπρόσθετη δομή) και παρέχουν το πιο σημαντικό μέρος της ανάλυσης σε πολλαπλότητες το οποίο σχετίζεται με τοπολογικές ιδιότητες. Υπάρχουν όμως και άλλα πράγματα που μπορεί κανείς να μελετήσει εάν η πολλαπλότητα είναι εφοδιασμένη με μια μετρική Ρήμαν. Το κομμάτι αυτό της γεωμετρίας λέγεται *Γεωμετρία Ρήμαν* και είναι εκτεταμένο αλλά και κάπως παρωχημένο σήμερα. Παρά ταύτα θα μελετήσουμε δύο σύγχρονα θέματα της Ρημάνειας Γεωμετρίας που σχετίζονται με τις διαφορικές μορφές και την τοπολογία: τις *αρμονικές διαφορικές μορφές* και τις *γεωδαισιακές*. Στα θέματα αυτά η ελληνική βιβλιογραφία είναι ελάχιστη έως ανύπαρκτη. Δεν θα ασχοληθούμε με την μελέτη της καμπυλότητας (κάτι που έγινε στη θεωρία επιφανειών, η γενίκευση για πολλαπλότητες με διάσταση μεγαλύτερη από 2 είναι άμεση και εύκολη και υπάρχει ικανοποιητική ελληνική βιβλιογραφία).

9.1 Ο Μετρικός Τανυστής

Ουσιαστικά μια μετρική Ρήμαν σε μια πολλαπλότητα M είναι ένα θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο που μεταβάλλεται με λείο τρόπο μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων T_xM της M. Για να αποκτήσει ολικό νόημα αυτό, παρατηρήστε πως ένα εσωτερικό γινόμενο είναι μια διγραμμική μορφή οπότε σε κάθε σημείο x θέλουμε ένα διάνυσμα στο τανυστικό γινόμενο

$$T_x^* \otimes T_x^*.$$

Μπορούμε να βάλουμε, όπως κάναμε για τις διαφορικές μορφές, μια δομή διανυσματικής δέσμης στο σύνολο

$$T^*M \otimes T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^* \otimes T_x^*.$$

Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για την διανυσματική δέσμη είναι οι ίδιες που χρησιμοποιήσαμε για την δέσμη των p-μορφών:

• κάθε σύστημα συντεταγμένων $x_1, x_2, ..., x_n$ ορίζει μια βάση $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ για κάθε T_x^* στην γειτονιά συντεταγμένων και τα n^2 σε πλήθος στοιχεία

$$dx_i \otimes dx_j, 1 \leq i, j \leq n$$

να δίδουν μια αντίστοιχη βάση στο $T_x^* \otimes T_x^*$

• ο Ιακωβιανός πίναξ αλλαγής συντεταγμένων να ορίζει μια αντιστρέψιμη λεία απεικόνιση $J : T_x^* \to T_x^*$ οπότε να έχουμε μια αντίστοιχη αντιστρέψιμη απεικόνιση $J \otimes J : T_x^* \otimes T_x^* \to T_x^* \otimes T_x^*$.

Με τα παραπάνω δεδομένα έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 30. Μια *μετρική Ρήμαν* σε μια πολλαπλότητα M είναι μια διατομή g της διανυσματικής δέσμης $T^*M \otimes T^*M$ η οποία σε κάθε σημείο $x \in M$ είναι συμμετρική και θετικά ορισμένη.

Σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων μπορούμε να γράψουμε

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j,$$

όπου $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ και οι $g_{ij}(x)$ είναι λείες συναρτήσεις και θετικά ορισμένες. Συχνά το σύμβολο του τανυστικού γινομένου παραλείπεται και γράφουμε απλά

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i dx_j.$$

Μια πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια μετρική Ρήμαν λέγεται πολλαπλότητα Ρήμαν.

Παραδείγματα:
1. Η Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$g = \sum dx_i \otimes dx_i.$$

Οπότε

$$g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}.$$

2. Μια υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^n$ έχει μια επαγόμενη Ρημάνεια μετρική: ο εφαπτόμενος χώρος στο x μπορεί να ειδοθεί ως ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και μπορούμε να πάρουμε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

Δοθείσης μιας λείας απεικόνισης $F : M \to N$ και μιας μετρικής g στην N, μπορούμε να τραβήξουμε πίσω την g και να πάρουμε μια διατομή F^*g της $T^*M \otimes T^*M$:

$$(F^*g)_x(X, Y) = g_F(x)(DF_x(X), DF_y(Y)).$$

Εάν η DF_x είναι αντιστρέψιμη, το τράβηγμα πίσω θα είναι επίσης θετικά ορισμένο οπότε πιο συγκεκριμένα η F θα είναι διαφορομορφισμός.

Ορισμός 31. Ένας διαφορομορφισμός $F : M \to N$ μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων Ρήμαν είναι μια *ισομετρία* εάν $F^* g_N = g_M$.

Παράδειγμα: Έστω $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ και

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Εάν $z = x + iy$ και

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

με a, b, c, d πραγματικούς και $ad - bc > 0$, τότε

$$F^* dz = (ad - bc)\frac{dz}{(cz + d)^2}$$

και

$$F^* y = y \circ F = \frac{1}{i}\left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}\right) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} y.$$

Τότε

$$F^* g = (ad - bc)^2 \frac{dx^2 + dy^2}{|(cz + d)^2|^2} \frac{|cz + d|^4}{(ad - bc)^2 y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = g.$$

Συνεπως αυτοί οι μετασχηματισμοί Möbius συνιστούν ισομετρίες μιας μετρικής Ρήμαν στο άνω ημιεπίπεδο.

Αυτή είναι η μη-Ευκλείδεια γεωμετρία με την οποία ασχοληθήκαμε στην Προβολική Γεωμετρία.

Με την βοήθεια μιας Ρημάνειας μετρικής μπορούμε να ορίσουμε το μήκος μιας καμπύλης πάνω σε μια πολλαπλότητα:

Ορισμός 32. Έστω M μια πολλαπλότητα Ρήμαν και $\gamma : [0, 1] \to M$ μια λεία απεικόνιση (δηλαδή μια λεία καμπύλη στην M). Το *μήκος* της καμπύλης ορίζεται ως

$$l(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\gamma', \gamma')} dt,$$

όπου $\gamma'(t) = D\gamma_t(d/dt)$.

Με τον ορισμό αυτό, οποιαδήποτε πολλαπλότητα Ρήμαν αποτελεί μετρικό χώρο: ορίζουμε

$$d(x,y) = inf\{l(\gamma) \in \mathbb{R} : \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}.$$

Είναι οι πολλαπλότητες Ρήμαν κάτι ιδιαίτερο; Όχι διότι:

Πρόταση 9.1 Κάθε πολλαπλότητα επιδέχεται μια μετρική Ρήμαν.

Απόδειξη: Θεωρούμε μια κάλυψη από γειτονιές συντεταγμένων της πολλαπλότητας και μια διαμέριση της μονάδας υποτεταγμένη στην κάλυψη. Σε κάθε ανοικτό σύνολο U_a έχουμε μια μετρική

$$g_a = \sum_i dx_i^2$$

σε τοπικές συντεταγμένες. Ορίζουμε την ποσότητα

$$g = \sum \phi_i g_{a(i)}.$$

Αυτό το άθροισμα είναι καλά ορισμένο διότι τα υποστηρίγματα των ϕ_i είναι τοπικά πεπερασμένα. Αφού $\phi_i \geq 0$ σε κάθε σημείο, κάθε όρος του αθροίσματος είναι θετικά ορισμένος ή μηδέν αλλά τουλάχιστον ένας είναι θετικά ορισμένος οπότε το άθροισμα είναι θετικά ορισμένο. $\square$

9.2 Η Ροή των Γεωδαισιακών

Θεωρούμε μια τυχαία πολλαπλότητα M και την συνεφαπτόμενη δέσμη αυτής T^*M με προβολή $p : T^*M \to M$. Έστω X ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της πολλαπλότητας T^*M στο σημείο $\xi_a \in T_a^*$. Τότε

$$Dp_{\xi_a}(X) \in T_aM$$

οπότε η

$$\theta(X) = \xi_a(Dp_{\xi_a}(X))$$

ορίζει μια κανονική 1-μορφή θ στην T^*M. Επιλέγοντας συντεταγμένες $(x,y) \mapsto \sum_i y_i dx_i$, η προβολή p είναι

$$p(x,y) = x,$$

οπότε εάν

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

τότε

$$\theta(X) = \sum_i y_i dx_i(Dp_{\xi_a} X) = \sum_i y_i a_i$$

η οποία δίδει

$$\theta = \sum_i y_i dx_i.$$

Στη συνέχεια παίρνουμε την εξωτερική παράγωγο

$$\omega = -d\theta = \sum_i dx_i \wedge dy_i$$

που αποτελεί την *κανονική 2-μορφή* στην συνεφαπτόμενη δέσμη. Είναι μη-εκφυλισμένη (δεν μηδενίζεται πουθενά), συνεπώς η απεικόνιση

$$X \mapsto i(X)\omega$$

από την εφαπτόμενη δέσμη της T^*M στην συνεφαπτόμενη δέσμη της T^*M αποτελεί ισομορφισμό.

Τώρα υποθέτουμε πως η f είναι μια λεία συνάρτηση στην T^*M. Η παράγωγός της είναι μια 1-μορφή df. Εξ' αιτίας του παραπάνω ισομορφισμού, υπάρχει μοναδικό διανυσματικό πεδίο X της T^*M τέτοιο ώστε

$$i(X)\omega = df.$$

Εάν h είναι μια άλλη συνάρτηση με διανυσματικό πεδίο Y, τότε

$$Y(f) = df(Y) = i(Y)i(X)\omega = -i(X)i(Y)\omega = -X(h).$$

Θα δούμε στη συνέχεια ότι σε μια πολλαπλότητα Ρήμαν υπάρχει μια φυσική συνάρτηση στην T^*M. Στην πραγματικότητα μια μετρική ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον εφαπτόμενο και στον συνεφαπτόμενο χώρο διότι η απεικόνιση

$$X \mapsto g(X, -)$$

ορίζει έναν ισομορφισμό από τον T στον T^*. Πιο συγκεκριμένα, εάν με g^* συμβολίσουμε το εσωτερικό γινόμενο στον T^*, τότε

$$g^*(\sum_j g_{ij} dx_j, \sum_k g_{kl} dx_l) = g_{ik}$$

που σημαίνει πως

$$g^*(dx_j, dx_k) = g^{jk},$$

όπου g^{jk} ο αντίστροφος πίνακας του g_{jk}.

Θεωρούμε τη συνάρτηση στην T^*M που ορίζεται από τη σχέση

$$H(\xi_a) = g^*(\xi_a, \xi_a).$$

Σε τοπικές συντεταγμένες αυτή γράφεται ως

$$H(x, y) = \sum_{ij} g^{ij}(x) y_i y_j.$$

Ορισμός 33. Το διανυσματικό πεδίο X στην T^*M που δίδεται από τη σχέση $i(X)\omega = dH$ ονομάζεται *γεωδαισιακή ροή* της μετρικής g.

Ορισμός 34. Εάν $\gamma : (a, b) \to T^*M$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη μιας γεωδαισιακής ροής, (δηλαδή η γεωδαισιακή ροή είναι πάντα εφαπτόμενη στην καμπύλη αυτή), τότε η καμπύλη $p(\gamma)$ πάνω στην M λέγεται μια *γεωδαισιακή*.

Σε τοπικές συντεταγμένες, εάν η γεωδαισιακή ροή είναι

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

τότε

$$i(X)\omega = \sum_k (a_k dy_k - b_k dx_k) = dH = \sum_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k} dx_k y_i y_j + 2 \sum_{ij} g^{ij} y_i dy_j.$$

Συνεπώς οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι λύσεις των

$$\frac{dx_k}{dt} = 2 \sum_j g^{kj} y_j$$

και

$$\frac{dy_k}{dt} = -\sum_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k} y_i y_j.$$

Πριν εξηγήσουμε γιατί αποτελούν γεωδαισιακές, παρατηρήστε ποιοτικά την συμπεριφορά αυτών των καμπυλών: Για κάθε σημείο $a \in M$, επιλέγουμε ένα σημείο $\xi_a \in T_a^*$ και θεωρούμε την μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη που ξεκινά από το ξ_a. Η εξίσωση

$$\frac{dx_k}{dt} = 2 \sum_j g^{kj} y_j$$

μας λέει πως η προβολή στο a της ολοκληρωτικής καμπύλης είναι παράλληλη στο εφαπτόμενο διάνυσμα X_a έτσι ώστε $g(X_a, -) = \xi_a$. Συνεπώς αυτές οι καμπύλες έχουν την ιδιότητα σε κάθε σημείο και σε κάθε κατεύθυνση διέρχεται μια γεωδαισιακή.

Οι γεωδαισιακές συνήθως θεωρούνται ως καμπύλες ελαχίστου μήκους οπότε στη συνέχεια θα συσχετίσουμε αυτή την ιδέα με τον παραπάνω ορισμό. Ξεκινάμε με το εξής πρόβλημα διαταραχών: Θέλουμε να βρούμε τα κριτικά σημεία του συναρτησοειδούς του μήκους

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma', \gamma')}dt,$$

για καμπύλες με σταθερά τελικά σημεία $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$. Για ευκολία υποθέτουμε πως τα a, b βρίσκονται στην ίδια γειτονιά συντεταγμένων. Εάν

$$F(x, z) = \sum_{ij} g_{ij}(x) z_i z_j,$$

τότε η πρώτη διαταραχή του μήκους θα είναι

$$\delta l = \int_0^1 \frac{1}{2} F^{-1/2} (\frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{d\dot{x}_i}{dt}) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} F^{-1/2} \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} F^{-1/2} \frac{\partial F}{\partial z_i}) \dot{x}_i dt,$$

ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες με $\dot{x}_i(0) = \dot{x}_i(1) = 0$. Συνεπώς ένα κριτικό σημείο του συναρτησοειδούς δίδεται από την εξίσωση

$$\frac{1}{2} F^{-1/2} \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} F^{-1/2} \frac{\partial F}{\partial z_i}) = 0.$$

Εάν παραμετροποιήσουμε αυτή την κριτική καμπύλη με το μήκος τόξου

$$s := \int_0^t \sqrt{g(\gamma', \gamma')} dt,$$

τότε $F = 1$ και η εξίσωση απλοποιείται στην ακόλουθη

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial F}{\partial z_i}) = 0.$$

Αλλά αυτή είναι η σχέση

$$\sum \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_k}{dt} - \frac{d}{dt} (2 g_{ik} \frac{dx_k}{dt}) = 0.$$

Αλλά εάν ορίσουμε τις ποσότητες y_i ως

$$\frac{dx_k}{dt} = 2\sum_j g^{kj} y_j$$

όπως στην πρώτη εξίσωση της γεωδαισιακής ροής

$$\frac{dx_k}{dt} = 2\sum_j g^{kj} y_j,$$

και την αντικαταστήσουμε στην

$$\sum \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_k}{dt} - \frac{d}{dt}(2g_{ik}\frac{dx_k}{dt}) = 0,$$

θα πάρουμε

$$4\sum \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{ja} y_a g^{kb} y_b - \frac{d}{dt}(4g_{ik}g^{ka}y_a) = 0$$

και χρησιμοποιώντας την

$$\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

καταλήγουμε στην

$$-\frac{\partial g^{jk}}{\partial x_i} y_j y_k = \frac{dy_i}{dt}$$

που είναι η δεύτερη εξίσωση της γεωδαισιακής ροής. (Χρησιμοποιήσαμε και την εξίσωση για την παράγωγο του αντίστροφου πίνακα $G : D(G^{-1}) = -G^{-1}DGG^{-1}$).

Ο παραπάνω φορμαλισμός μας διευκολύνει στην επίλυση των εξισώσεων των γεωδαισιακών όταν υπάρχουν ισομετρίες της μετρικής. Εάν $F : M \to M$ είναι ένας διαφορομορφισμός της M τότε η φυσική του δράση στις 1-μορφές επάγει έναν διαφορομορφισμό στην T^*M. Το ίδιο συμβαίνει με μια μονοπαραμετρική ομάδα ϕ_t. Εάν διαφορίσουμε στο σημείο $t = 0$ αυτό σημαίνει ότι ένα διανυσματικό πεδίο X στην M επάγει ένα διανυσματικό πεδίο $\tilde{X}$ στην T^*M. Επιπλέον η 1-μορφή θ στην T^*M ορίζεται με κανονικό τρόπο οπότε είναι αναλλοίωτη κάτω από την επαγώμενη δράση οποιουδήποτε διαφορομορφισμού. Αυτό σημαίνει πως

$$L_{\tilde{X}}\theta = 0$$

οπότε

$$i(\tilde{X})d\theta + d(i(\tilde{X})\theta) = 0.$$

Αφού όμως $\omega = -d\theta$, τότε

$$i(\tilde{X})\omega = df,$$

όπου $f = i(\tilde{X})\theta$.

Πρόταση 9.2 Κάθε διανυσματικό πεδίο Y στην T^*M για το οποίο $L_Y\theta = 0$, είναι διανυσματικό πεδίο $\tilde{X}$ επαγόμενο από κάποιο διανυσματικό πεδίο X της M. Η συνάρτηση $f = i(\tilde{X})\theta$ είναι $f(\xi_x) = \xi_x(X_x)$.

Απόδειξη: Σε κάποιες τοπικές συντεταγμένες γράφουμε

$$Y = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

όπου $\theta = \sum_i y_i dx_i$. Τότε η $L_Y\theta = 0$ δίδει

$$0 = \sum_i b_i dx_i + \sum_{i,j} y_i (\frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial a_i}{\partial y_j} dy_j).$$

Η σχέση αυτή όμως σημαίνει ότι τα a_i είναι ανεξάρτητα από τα y_i οπότε το

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

είναι το απαιτούμενο διανυσματικό πεδίο X στην M, οπότε έχουμε

$$i(\tilde{X})\theta = \sum_i a_i(x) y_i = \xi_x(X_x)$$

εξ' ορισμού της θ. $\square$

Τώρα έστω M μια πολλαπλότητα Ρήμαν και H η συνάρτηση στην T^*M που ορίζεται από την μετρική όπως παραπάνω. Εάν ϕ_t είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα ομάδα ισομετριών, τότε οι επαγόμενοι διαφορομορφισμοί στην T^*M θα διατηρούν την συνάρτηση H οπότε το διανυσματικό πεδίο $\tilde{Y}$ θα ικανοποιεί την

$$\tilde{Y}(H) = 0.$$

Αλλά από την

$$Y(f) = df(Y) = i(Y)i(X)\omega = -i(X)i(Y)\omega = -X(h)$$

αυτό σημαίνει ότι $X(f) = 0$, όπου X είναι η γεωδαισιακή ροή και f η συνάρτηση $i(\tilde{Y})\theta$. Αυτή η συνάρτηση είναι σταθερή κατά μήκος της γεωδαισιακής ροής οπότε αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης στις εξισώσεις των γεωδαισιακών.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την μετρική

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}$$

στο άνω ημιεπίπεδο του $\mathbb{R}^2$ και την γεωδαισιακή ροή του X.

Η απεικόνιση $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + t, x_2)$ αποτελεί φανερά μια μονοπαραμετρική ομάδα ισομετριών (τους μετασχηματισμούς Möbius $z \mapsto z + t$), οπότε ορίζει το διανυσματικό πεδίο

$$Y = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Στην συνεφαπτόμενη δέσμη αυτό δίδει την συνάρτηση

$$f(x, y) = y_1$$

που είναι σταθερή στην ολοκληρωτική καμπύλη.

Η απεικόνιση $z \mapsto e^t z$ αποτελεί επίσης ισομετρία με διανυσματικό πεδίο

$$Z = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

έτσι ώστε η ποσότητα

$$g(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

να είναι σταθερή.

Επίσης αυτομάτως και η ποσότητα $H = x_2^2(y_1^2 + y_2^2)$ είναι επίσης σταθερή αφού

$$X(H) = i(X)i(X)\omega = 0.$$

Συνεπώς έχουμε τρεις εξισώσεις για τις ολοκληρωτικές καμπύλες της γεωδαισιακής ροής:

$$y_1 = c_1$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = c_2$$

και

$$x_2^2(y_1^2 + y_2^2) = c_3.$$

Απαλείφοντας τα y_1, y_2 παίρνουμε τις γεωδαισιακές

$$(c_1 x_1 - c_2)^2 + c_1^2 x_2^2 = c_3.$$

Εάν $c_1 = 0$ η γεωδαισιακή είναι η ημιευθεία $x_2 = const$. Δοαφορετικά είναι ένα ημικύκλιο με κέντρο στον x_1-άξονα. Αυτές είναι οι ευθείες της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας που τις είδαμε και στην Προβολική Γεωμετρία.

9.3 Αρμονικές Διαφορικές Μορφές

Αναφέραμε προηγουμένως ότι η μετρική g ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο όχι μόνο στον εφαπτόμενο χώρο T_a αλλά ορίζει και ένα εσωτερικό γινόμενο g^* στον συνεφαπτόμενο χώρο T_a^*. Μέσω του δεύτερου μπορούμε να ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στην p-οστή εξωτερική δύναμη $\Lambda^p T_a^*$:

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_p, b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_p) = detg^*(a_i, b_j).$$

Πιο συγκεκριμένα σε μια πολλαπλότητα διάστασης n υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο σε κάθε ίνα της δέσμης $\Lambda^n T^*$. Αφού κάθε ίνα έχει διάσταση 1 υπάρχουν μόνο δύο μοναδιαία διανύσματα $\pm u$.

Ορισμός 35. Έστω M μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα Ρήμαν, τότε η *μορφή όγκου* είναι η μοναδική n-μορφή ω με μοναδιαίο μήκος στην κλάση ισοδυναμίας που ορίζεται από τον προσανατολισμό.

Σε τοπικές συντεταγμένες ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_p, b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_p) = detg^*(a_i, b_j)$$

δίδει

$$(dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n, dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n) = detg^*_{ij} = (detg_{ij})^{-1}.$$

Συνεπώς εάν η $dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$ ορίζει τον προσανατολισμό, τότε η μορφή-όγκου θα είναι

$$\omega = \sqrt{detg_{ij}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Σε μια συμπαγή πολλαπλότητα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την παραπάνω για να αποκτήσουμε τον ολικό όγκο, συνεπώς μια μετρική δεν ορίζει μόνο μήκη αλλά και όγκους.

Στη συνέχεια θεωρούμε $\alpha \in \Lambda^p T_a^*, \beta \in \Lambda^{n-p} T_a^*$ και ορίζουμε την απεικόνιση $f_\beta : \Lambda^p T_a^* \to \mathbb{R}$ μέσω της σχέσης

$$f_\beta(\alpha)\omega = \beta \wedge \alpha.$$

Όμως έχουμε και ένα εσωτερικό γινόμενο οπότε κάθε γραμμική απεικόνιση στο $\Lambda^p T_a^*$ είναι της μορφής

$$\alpha \mapsto (\alpha, \gamma)$$

για κάποιο $\gamma \in \Lambda^p T_a^*$, οπότε έχουμε μια καλά-ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\beta \mapsto \gamma_\beta$ από το $\Lambda^{n-p} T^*$ στο $\Lambda^p T^*$ που ικανοποιεί την σχέση

$$(\gamma_\beta, \alpha)\omega = \beta \wedge \alpha.$$

Για αυτή τη γραμμική απεικόνιση χρησιμοποιούμε ένα διαφορετικό σύμβολο:

Ορισμός 36. Το *αστέρι του Hodge* είναι η γραμμική απεικόνιση $* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ με την ιδιότητα σε κάθε σημείο να ισχύει η εξής σχέση

$$(\alpha, \beta)\omega = \alpha \wedge *\beta.$$

Παράδειγμα: Εάν $e_1, e_2, ..., e_n$ είναι μια ορθοκανονική βάση στο χώρο των 1-μορφών σε κάποιο σημείο, τότε

$$*(e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_p) = e_{p+1} \wedge ... \wedge e_n.$$

Πρόταση 9.3 Στις p-μορφές ισχύει ότι

$$*^2 = (-1)^{p(n-p)}.$$

Απόδειξη: Άσκηση.

Σε μια πολλαπλότητα Ρήμαν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή αστέρι για να ορίσουμε καινούργιους διαφορικούς τελεστές. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε τους τελεστές

$$d^* : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$$

που ορίζεται από τη σχέση

$$d^* = (-1)^{np+n+1} * d * .$$

Ο συμβολισμός είναι ενδεικτικός διότι ισχύει η παρακάτω:

Πρόταση 9.3 Έστω M μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα Ρήμαν με μορφή όγκου ω και έστω $\alpha \in \Omega^p(M)$ και $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$ κάποιες διαφορικές μορφές με συμπαγές υποστήριγμα. Τότε

$$\int_M (d^*\alpha, \beta)\omega = \int_M (\alpha, d\beta)\omega.$$

(δηλαδή οι τελεστές d και d^* είναι συζυγείς).

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int_M (d^*\alpha, \beta)\omega = (-1)^{np+n+1} \int_M (*d * \alpha, \beta)\omega = (-1)^{np+n+1} \int_M (\beta, *d * \alpha)\omega =$$

$$= (-1)^{np+n+1} \int_M \beta \wedge * * d * \alpha$$

από τον ορισμό των d^* και $*$. Όμως στην $(n-p+1)$-μορφή $d * \alpha$, έχουμε ότι $*^2 = (-1)^{(n-p+1)(p-1)}$, οπότε αυτό είναι

$$(-1)^{np+n+1+(n-p+1)(p-1)} \int_M \beta \wedge d * \alpha = (-1)^p \int_M \beta \wedge d * \alpha.$$

Τώρα

$$d(\beta \wedge *\alpha) = d\beta \wedge *\alpha + (-1)^{p-1} \beta \wedge d * \alpha.$$

Ολοκληρώνοντας την $d\beta \wedge *\alpha$ θα πάρουμε 0 από το Θεώρημα Stokes οπότε καταλήγουμε στην

$$(-1)^p \int_M \beta \wedge d * \alpha = \int_M d\beta \wedge *\alpha = \int_M (\alpha, d\beta)\omega.$$

□

Ορισμός 37. Έστω M μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα Ρήμαν, τότε η *Λαπλασιανή (τελεστής Laplace)* στις p-μορφές είναι ο διαφορικός τελεστής $\Delta : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ που ορίζεται ως εξής:

$$\Delta = dd^* + d^*d.$$

Παράδειγμα: Έστω $M = \mathbb{R}^3$ με την Ευκλείδεια μετρική και $\alpha = a_1 dx_1$. Τότε

$$\Delta(a_1 dx_1) = (dd^* + d^*d)(a_1 dx_1)$$

οπότε

$$dd^*(a_1 dx_1) = -d*d*(a_1 dx_1) = -d*d(a_1 dx_2 \wedge dx_3) = -d*\frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 =$$

$$= -d\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} dx_1 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3 \partial x_1} dx_3$$

και

$$d^*d(a_1 dx_1) = d^*(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1) = *d(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_3 - \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_2) =$$

$$= *(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2} dx_3 \wedge dx_2) =$$

$$= \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} dx_1 + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1 \partial x_3} dx_3 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2} dx_1.$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$\Delta(a_1 dx_1) = -(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2})dx_1,$$

που είναι η συνήθης Λαπλασιανή (με ένα $-$) στον συντελεστή a_1. Από την γραμμικότητα, το ίδιο ισχύει για μια τυχαία 1-μορφή $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$.

Όταν $p = 0$ έχουμε

$$\Delta f = d^* df = (-1)^{n+n+1} * d * df = - * d * df,$$

που μερικές φορές στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως *τελεστής Laplace-Beltrami* (ίσως με κάποιες διαφορές στις συνθήκες για τα πρόσημα).

Παραδείγματα

1. Εάν πάρουμε $M = \mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική, τότε

$$df = \sum_i^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

$$*df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_2 \wedge ... \wedge dx_n + ...,$$

$$d * df = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n + ...,$$

και

$$\Delta f = - * d * df = -\sum_i^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

2. Έστω M το άνω ημιεπίπεδο με μετρική

$$g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

Τότε

$$\omega = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy,$$

$$*dx = dy,$$

$$*dy = -dx$$

και

$$\Delta f = - * d(\frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx) = -y^2(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}).$$

Έπεται ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης του $z = x + iy$ ικανοποιούν την εξίσωση $\Delta f = 0$, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της Ευκλείδειας μετρικής.

Ορισμός 38. Μια διαφορική μορφή $\alpha \in \Omega^p(M)$ λέγεται *αρμονική* εάν $\Delta\alpha = 0$.

Σε μια συμπαγή πολλαπλότητα, οι αρμονικές μορφές παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο, κάτι που το μελετά η λεγόμενη θεωρία Hodge. Σε αυτό το μάθημα δεν μπορούμε να την μελετήσουμε αναλυτικά, αλλά παραθέτουμε όμως το βασικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 9.5 Έστω M μια συμπαγής, προσανατολίσιμη πολλαπλότητα Ρήμαν. Τότε:

- Μια p-μορφή α είναι αρμονική εάν και μόνον εάν $d\alpha = 0 = d^*\alpha$.

- Σε κάθε συνομολογιακή κλάση de Rham υπάρχει το πολύ μια αρμονική μορφή.

Απόδειξη: Φανερά εάν $d\alpha = 0 = d^*\alpha$, τότε $(dd^* + d^*d)\alpha = 0$. Υποθέτουμε για το αντίστροφο ότι $\Delta\alpha = 0$, τότε

$$0 = \int_M (\Delta\alpha, \alpha)\omega = \int_M [(dd^* + d^*d)\alpha, \alpha]\omega = \int_M (d^*\alpha, d^*\alpha)\omega + \int_M (d\alpha, d\alpha)\omega.$$

Όμως οι δυο τελευταίοι όροι είναι μη-αρνητικοί και μηδενίζονται εάν και μόνον εάν $d\alpha = d^*\alpha = 0$.

Έστω τώρα ότι οι α και α' είναι δύο αρμονικές μορφές στην ίδια συνομολογιακή κλάση, τότε

$$\alpha - \alpha' = d\beta.$$

Όμως τότε

$$0 = d^*\alpha - d^*\alpha' = d^*d\beta$$

και

$$0 = \int_M (d^*d\beta, \beta)\omega = \int_M (d\beta, d\beta)\omega$$

η οποία δίδει $d\beta = 0$ και $\alpha = \alpha'$. $\square$

Το παραπάνω (σχετικά απλό) θεώρημα λέει ότι σε κάθε συνομολογιακή κλάση de Rham υπάρχει το πολύ μία αρμονική μορφή. Ένα πολύ πιο δύσκολο

θεώρημα του W.V.D. Hodge λέει ότι σε κάθε συνομολογιακή κλάση de Rham υπάρχει μία αρμονική μορφή, άρα συνδυάζοντας τα δύο προκύπτει ότι σε κάθε συνομολογιακή κλάση de Rham υπάρχει μοναδική αρμονική μορφή. Το θεώρημα Hodge είχε (και συνεχίζει να έχει) βαθειές συνέπειες στην γεωμετρία (αλλά και στις διαφορικές εξισώσεις, την φυσική κλπ) από το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα που εμφανίστηκε μέχρι και σήμερα. Η απόδειξη του θεωρήματος Hodge είναι πολύπλοκη και εκτεταμένη και υπερβαίνει τους σκοπούς αυτού του προπτυχιακού μαθήματος. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης (που μπορεί να διαθέσει 1-2 εβδομάδες) μπορεί να μελετήσει μια απόδειξη που υπάρχει στο [5]. Μια φυσική αναλυτική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος είναι η εξής: η αρμονική μορφή α σε μια συνομολογιακή κλάση de Rham είναι αυτή με την μικρότερη L^2-νόρμα, διότι κάθε άλλη θα είναι της μορφής $\alpha + d\beta$ και

$$\int_M (\alpha + d\beta, \alpha + d\beta)\omega = \int_M (\alpha, \alpha)\omega + \int_M (d\beta, d\beta)\omega \geq \int_M (\alpha, \alpha)\omega,$$

μιας και

$$\int_M (\alpha, d\beta)\omega = \int_M (d^*\alpha, \beta)\omega = 0.$$

Υπάρχουν μερικά πορίσματα του θεωρήματος Hodge, ένα απλό είναι το εξής:

Πρόταση 9.6 Η Λαπλασιανή μετατίθεται με το αστέρι του Hodge.

Απόδειξη:

$$(dd^* + d^*d) * \alpha = (-1)^{n(n-p)+n+1} d * d * *\alpha + (-1)^{n(n-p+1)+n+1} * d * d * \alpha =$$

$$= (-1)^{n(n-p)+n+1+p(n-p)} d * d\alpha + (-1)^{n+np+1} * d * d * \alpha =$$

$$= (-1)^{p+1} d * d\alpha + (-1)^{n+np+1} * d * d * \alpha$$

και

$$*(dd^* + d^*d)\alpha = (-1)^{np+n+1} * d * d * \alpha + (-1)^{n(p+1)+n+1} d * d * *\alpha =$$

$$= (-1)^{np+n+1} * d * d * \alpha + (-1)^{n(p+1)+n+p(n-p)+1} d * d\alpha =$$

$$= (-1)^{np+n+1} * d * d * \alpha + (-1)^{p+1} d * d\alpha.$$

□

Έπεται από την παραπάνω πρόταση ότι το αστέρι απεικονίζει αρμονικές μορφές σε αρμονικές μορφές. Επιπροσθέτως, αφού είδαμε ότι στις p-μορφές, $*^2 = (-1)^{p(n-p)}$, το αστέρι είναι αντιστρέψιμος τελεστής οπότε απεικονίζει τον

χώρο των αρμονικών p-μορφών *ισόμορφα* στον χώρο των αρμονικών $(n-p)$-μορφών. Συνεπώς ως απόρροια του Θεωρήματος Hodge έχουμε το παρακάτω:

Πόρισμα 9.7

$$\dim H^p(M) = \dim H^{n-p}(M).$$

Στην περίπτωση που $p = 0$ είδαμε μια διαφορετική απόδειξη στο Θεώρημα 8.2.

10 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Βοηθητικά Αποτελέσματα

Στο Παράρτημα συγκεντρώσαμε ορισμένα τεχνικά αποτελέσματα που χρησιμοποιήσαμε κατά την απόδειξη των προτάσεων τα οποία δεν τα αναφέραμε για να μην διακοπεί η ροή των σημειώσεων.

10.1 Το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης

Λήμμα 10.1 (*Αρχή της Απεικόνισης Συστολής*) Έστω (M, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $T : M \to M$ μια απεικόνιση με την ιδιότητα

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

όπου $x, y \in M$ και $k < 1$. Τότε η T έχει μοναδικό σταθερό σημείο (δηλαδή υπάρχει μοναδικό $z \in M$ τέτοιο ώστε $Tz = z$).

Απόδειξη: Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $x_0 \in M$, τότε

$$d(T^m x_0, T^n x_0) \leq k^m d(x_0, T^{n-m} x_0)$$

(για $n \geq m$) και συνεχίζουμε την παραπάνω ανισότητα

$$k^m d(x_0, T^{n-m} x_0) \leq k^m (d(x_0, Tx_0) + d(Tx_0, T^2 x_0) + ... + d(T^{n-m-1} x_0, T^{n-m} x_0)) \leq$$

$$\leq k^m (1 + k + ... + k^{n-m-1}) d(x_0, Tx_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_0, Tx_0).$$

Η παραπάνω αποτελεί ακολουθία Cauchy, οπότε η πληρότητα του M συνεπάγεται ότι η ακολουθία συγκλίνει στο x, δηλαδή $x = \lim T^n x_0$, οπότε από την συνέχεια της T παίρνουμε

$$Tx = \lim T^{n+1} x_0 = x.$$

Για την μοναδικότητα, εάν $Tx = x$ και $Ty = y$, τότε

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

οπότε $k < 1 \Rightarrow d(x, y) = 0$. $\square$

Θεώρημα 10.2 (*Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης*) Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ κάποιο ανοικτό σύνολο και $f : U \to \mathbb{R}^n$ μια C^∞ συνάρτηση με αντίστροφη παράγωγο Df_a στο $a \in U$. Τότε υπάρχουν γειτονιές U, W των a και $f(a)$

αντίστοιχα τέτοιες ώστε $f(V) = W$ και η f έχει μια C^∞ αντίστροφη στο W.

Απόδειξη: Μέσω ενός ομοπαραλληλικού μετασχηματισμού $x \mapsto Ax + b$ υποθέτουμε $a = 0$ και $Df_a = I$ (μοναδιαίος πίνακας). Τώρα θεωρούμε $g(x) = x - f(x)$. Εκ κατασκευής $Dg_0 = 0$ οπότε από την συνέχεια υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $||x|| < 2r \Rightarrow ||Dg_x|| < 1/2$.

Από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται πως

$$||g(x)|| \leq \frac{1}{2}||x||$$

οπότε η g απεικονίζει την κλειστή μπάλα $\bar{B}(0, r)$ στην $\bar{B}(0, r/2)$. Στη συνέχεια θεωρούμε την

$$g_y(x) = y + x - f(x)$$

(Η επιλογή της g_y έγινε ώστε το σταθερό σημείο $g_y(x) = x$ να επιλύει την $f(x) = y$).

Εάν τώρα $||y|| \leq r/2$ και $||x|| \leq r$, τότε

$$||g_y(x)|| \leq \frac{1}{2}r + ||g(x)|| \leq \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r,$$

οπότε η g_y απεικονίζει τον πλήρη μετρικό χώρο $M = \bar{B}(0, r)$ στον εαυτό του. Επιπλέον

$$||g_y(x_1) - g_y(x_2)|| = ||g(x_1) - g(x_2)|| \leq \frac{1}{2}||x_1 - x_2||$$

εάν $x_1, x_2 \in \bar{B}(0, r)$, συνεπώς η g_y αποτελεί μια απεικόνιση συστολής. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 10.1 έχουμε ένα μοναδικό σταθερό σημείο και άρα και μια αντίστροφη $\phi = f^{-1}$.

Στη συνέχεια θα πρέπει να δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής και ότι έχει παραγώγους κάθε τάξης. Από τον ορισμό της g και το θεώρημα μέσης τιμής παίρνουμε

$$||x_1 - x_2|| \leq ||f(x_1) - f(x_2)|| + ||g(x_1) - g(x_2)|| \leq ||f(x_1) - f(x_2)|| + \frac{1}{2}||x_1 - x_2||,$$

οπότε

$$||x_1 - x_2|| \leq 2||f(x_1) - f(x_2)||$$

που αποδεικνύει την συνέχεια της ϕ. Ακόμη έπεται από αυτή την ανισότητα ότι εάν $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$, όπου $y_1, y_2 \in \bar{B}(0, r/2)$, τότε $x_1, x_2 \in \bar{B}(0, r)$, οπότε

$$||\phi(y_1) - \phi(y_2) - (Df_{x_2})^{-1}(y_1 - y_2)|| = ||x_1 - x_2 - (Df_{x_2})^{-1}[f(x_1) - f(x_2)]|| \leq$$

$$\leq ||(Df_{x_2})^{-1}||||Df_{x_2}(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2)|| \leq A||x_1 - x_2||R$$

όπου το A είναι ένα φράγμα του $||(Df_{x_2})^{-1}||$ και η συνάρτηση $||x_1 - x_2||R$ αποτελεί το υπόλοιπο στον ορισμό της διαφορισιμότητας της f. Αλλά $||x_1 - x_2|| \leq 2||y_1 - y_2||$ οπότε καθώς $y_1 \to y_2$, τότε $x_1 \to x_2$ οπότε $R \to 0$, συνεπώς η ϕ είναι διαφορίσιμη και επιπλέον η παράγωγός της είναι η $(Df)^{-1}$.

Τώρα γνωρίζουμε την παράγωγο της ϕ:

$$D\phi = (Df)^{-1},$$

οπότε βλέπουμε ότι αυτή είναι συνεχής και έχει τόσες παραγώγους όσες και η ίδια η f, άρα η ϕ είναι C^∞. $\square$

10.2 Ύπαρξη Λύσεων σε Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Λήμμα 10.3 Έστω M ένας πλήρης μετρικός χώρος και $T : M \to M$ μια απεικόνιση. Τότε εάν η T^n αποτελέι απεικόνιση συστολής τότε η T έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Απόδειξη: Από την αρχή της απεικόνισης συστολής, η T^n έχει μοναδικό σταθερό σημείο x. Επίσης έχουμε

$$T^n(Tx) = T^{n+1}x = T(T^n x) = Tx,$$

οπότε το Tx αποτελεί επίσης ένα σταθερό σημείο της T^n. Από την μοναδικότητα συνεπώς έχουμε $Tx = x$. $\square$

Θεώρημα 10.4 Έστω $f(t, x)$ μια συνεχής συνάρτηση στο $|t - t_0| \leq a$, $||x - x_0|| \leq b$, και έστω ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz:

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq ||x_1 - x_2||.$$

Εάν $M = sup|f(t, x)|$ και $h = min(a, b/M)$, τότε η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

έχει μοναδική λύση για $|t - t_0| \leq h$.

Απόδειξη: Θέτουμε

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Τότε η Tx είναι διαφορίσιμη αφού οι f και x είναι συνεχείς και εάν $Tx = x$, το x ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση που προκύπτει εάν διαφορίσουμε την σχέση ορισμού της T. Χρησιμοποιούμε τον μετρικό χώρο

$$X := \{x \in C([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n) : ||x(t) - x_0|| \leq Mh\}$$

με την ομοιόμορφη μετρική

$$d(x_1, x_2) = sup_{|t-t_0|\leq h}||x_1(t) - x_2(t)||$$

που καθιστά τον μετρικό χώρο πλήρη. Εάν $x \in M$, τότε $Tx \in M$ και ισχυριζόμαστε ότι

$$||T^k x_1(t) - T^k x_2(t)|| \leq \frac{c^k}{k!}|t - t_0|^k d(x_1, x_2).$$

Για $k = 0$ είναι φανερό ότι η πρόταση ισχύει και θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό:

$$||T^k x_1(t) - T^k x_2(t)|| \leq \int_{t_0}^{t} ||f(s, T^{k-1}x_1(s)) - f(s, T^{k-1}x_2(s))||ds \leq$$

$$\leq c \int_{t_0}^{t} ||T^{k-1}x_1(s) - T^{k-1}x_2(s)||ds \leq$$

$$\leq [c^k/(k-1)!][\int_{t_0}^{t} |s - t_0|^{k-1}ds]d(x_1, x_2) \leq$$

$$\leq (c^k/k!)|t - t_0|^k d(x_1, x_2),$$

οπότε η T^n αποτελεί απεικόνιση συστολής για αρκετά μεγάλο N και το θεώρημα αποδείχθηκε. □

Θεώρημα 10.5 Η παραπάνω λύση εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τις αρχικές συνθήκες x_0.

Απόδειξη: Παίρνουμε $h_1 \leq h$ και $\delta > 0$, τέτοια ώστε $Mh + \delta \leq b$ και ορίζουμε το σύνολο

$$Y := \{y \in C([t_0 - h_1, t_0 + h_1] \times \bar{B}(x_0, \delta), \mathbb{R}^n) : ||y(t, x) - x|| \leq Mh, y(t_0, x) = x\},$$

που αποτελεί πλήρη μετρικό χώρο όπως και το X προηγουμένως. Στη συνέχεια θέτουμε

$$(Ty)(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s,x))ds.$$

Αφού $Mh_1+\delta \leq b$, η T απεικονίζει το Y στον εαυτό του και ακριβώς όπως πριν η T^n αποτελεί απεικόνιση συστολής με μοναδικό σταθερό σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(t,y), y(t_0,x) = x.$$

Αφού η y είναι συνεχής ως προς τα t και x, αυτό είναι που χρειαζόμαστε. $\square$

Εάν η $f(t,x)$ είναι λεία, χρειαζόμαστε περισσότερη δουλειά για να αποδείξουμε ότι και η λύση είναι λεία με λεία εξάρτηση από τις παραμέτρους.

10.3 Λεία Εξάρτηση

Λήμμα 10.6 Έστω $A(t,x)$ και $B(t,x)$ συνεχείς συναρτήσεις με τιμές σε κάποιο κατάλληλο χώρο πινάκων και παίρνουμε $M \geq sup_{t,x}||B||$. Οι λύσεις των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d\xi(t,x)}{dt} = A(t,x)\xi(t,x), \xi(t_0,x) = a(x)$$

και

$$\frac{d\eta(t,x)}{dt} = B(t,x)\eta(t,x), \eta(t_0,x) = b(x)$$

ικανοποιούν την σχέση

$$sup_x||\xi(t,x) - \eta(t,x)|| \leq C||A-B||\frac{e^{M|t-t_0|}-1}{M} + ||a-b||e^{M|t-t_0|},$$

όπου C είναι κάποια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα A και a.

Απόδειξη: Από το θεώρημα ύπαρξης των λύσεων γνωρίζουμε πως να βρούμε λύσεις ως όρια των ακολουθιών ξ_n και η_n όπου

$$\xi_k = a + \int_{t_0}^{t} A\xi_{k-1}ds$$

και

$$\eta_k = b + \int_{t_0}^{t} B\eta_{k-1}ds.$$

Έστω $g_k(t) = sup_x||\xi_k(t,x) - \eta_k(t,x)||$ και $C = sup_{k,x,t}||\xi_k||$. Τότε

$$g_n(t) \leq ||a-b|| + C||A-B|||t-t_0| + M\int_{t_0}^{t} g_{n-1}(s)ds.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την f_n ως $f_0(t) = ||a-b||$ και μετά επαγωγικά μέσω της σχέσης

$$f_n(t) = ||a-b|| + C||A-B|||t-t_0| + M\int_{t_0}^{t} f_{n-1}(s)ds.$$

Συγκρίνοντας αυτές τις δύο βλέπουμε πως $f_n \geq g_n$. Αυτή αποτελεί απεικόνιση συστολής οπότε $f_n \to f$ με

$$f(t) = ||a-b|| + C||A-B|||t-t_0| + M\int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

και επιλύοντας την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$f(t) = ||a-b||e^{M|t-t_0|} + C||A-B||\frac{e^{M|t-t_0|}-1}{M}.$$

Καθώς $g_n(t) \leq f_n(t)$,

$$sup_x||\xi_n(t,x) - \eta_n(t,x)|| \leq f_n(t)$$

και το θεώρημα έπεται από το όριο εάν αφήσουμε $n \to \infty$. $\square$

Θεώρημα 10.7 Εάν η f είναι κλάσης C^k και

$$\frac{d}{dt}\alpha(t,x) = f(t,\alpha(t,x)), \alpha(0,x) = x,$$

τότε και η α είναι επίσης κλάσης C^k.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο k. Η πιο δύσκολη περίπτωση είναι η $k = 1$. Υποθέτουμε λοιπόν πως η f είναι κλάσης C^1 οπότε οι $\partial f/\partial t$ και $\partial f/\partial x_i$ υπάρχουν και είναι συνεχείς. Πρέπει να δείξουμε ότι και η α είναι κλάσης C^1 σε όλες τις μεταβλητές. Εάν αυτό ίσχυε, τότε η συνάρτηση με τιμές σε κάποιο κατάλληλο χώρο πινάκων λ, όπου $\lambda_i := \partial\alpha/\partial x_i$, θα αποτελούσε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d\lambda}{dt} = D_x f(t,\alpha)\lambda,$$

οπότε θα πρέπει να επιλύσουμε αυτή την εξίσωση χρησιμοποιώντας το θεώρημα ύπαρξης λύσεων και στη συνέχεια να αποδείξουμε πως η λύση είναι η παράγωγος της α. Έστω $F(s) = f(t, a + s(b - a))$. Τότε

$$\frac{dF}{ds} = D_x f(t, a + s(b - a))(b - a)$$

οπότε

$$f(t, b) - f(t, a) = \int_0^1 D_x f(t, a + s(b - a))(b - a)ds.$$

Αλλά τότε

$$\frac{d}{dt}[\alpha(t, x + y) - \alpha(t, x)] = f(t, \alpha(t, x + y)) - f(t, \alpha(t, x)) =$$

$$= \int_0^1 D_x f(t, \alpha(t, x) + s(\alpha(t, x + y) - \alpha(t, x)))(\alpha(t, x + y) - \alpha(t, x)ds.$$

Έστω $A(t, x) := D_x f(t, \alpha(t, x))$, $\xi(t, x) := \lambda(t, x)y$ και

$$B_y(t, x) := \int_0^1 D_x f(t, \alpha(t, x) + s(\alpha(t, x + y) - \alpha(t, x)))ds$$

ενώ

$$\eta_y(t, x) = \alpha(t, x + y) - \alpha(t, x).$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 10.6 και παίρνουμε

$$sup_{|t|\leq\epsilon}||\lambda(t, x)y - [\alpha(t, x + y) - \alpha(x)]|| = o(||y||),$$

οπότε $D_x\alpha = \lambda$ που είναι συνεχής στις (t, x). Επειδή επίσης $d\alpha/dt = f(t, \alpha)$, αυτό σημαίνει ότι η α είναι επίσης κλάσης C^1 σε όλες τις μεταβλητές.

Για τη συνέχεια, υποθέτουμε για την επαγωγή ότι το θεώρημα ισχύει για $k - 1$ και η f είναι κλάσης C^k. Τότε η $A(t, x) = D_x f(t, \alpha(t, x))$ είναι κλάσης C^{k-1} αλλά επειδή

$$\frac{d\lambda}{dt} = A\lambda,$$

έχουμε ότι και η λ είναι κλάσης C^{k-1}. Τώρα $D_x\alpha = \lambda$, οπότε οι x_i-παράγωγοι της α είναι κλάσης C^{k-1}. Αλλά επίσης και η $d\alpha/dt = f(t, \alpha)$ είναι κλάσης C^{k-1}, οπότε η α είναι κλάσης C^k. $\square$

10.4 Διαμερίσεις της Μονάδας σε Τυχαίες Πολλαπλότητες

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της διαμέρισης της μονάδας από την παράγραφο 6.2:

Ορισμός 39. Μια *διαμέριση της μονάδας* σε μια πολλαπλότητα M είναι μια συλλογή $\{\phi_i\}_{i\in I}$ λείων συναρτήσεων με τις εξής ιδιότητες:

- $\phi_i \geq 0$
- το υποστήριγμα $\{supp\phi_i : i \in I\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο
- $\sum_i \phi_i = 1$.

Τοπικά πεπερασμένο εδώ σημαίνει ότι για κάθε $x \in M$ υπάρχει μια γειτονιά U που τέμνει μόνο πεπερασμένο πλήθος υποστηριγμάτων (σύνολα που η συνάρτηση δεν μηδενίζεται) $supp\phi_i$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το θεώρημα που αναφέραμε στην παράγραφο 6.2:

Θεώρημα 10.8 Δοθείσης μιας ανοικτής κάλυψης $\{V_a\}$ μιας πολλαπλότητας M, υπάρχει μια διαμέριση της μονάδας $\{\phi_i\}_{i\in I}$ στην M τέτοια ώστε $supp\phi_i \subset V_{a(i)}$ για κάποιο $a(i)$.

Λέμε τότε ότι η διαμέριση της μονάδας είναι *υποτεταγμένη (subordinate)* στην δοθείσα κάλυψη.

Απόδειξη: (Με εξάντληση!)

1. Η M είναι τοπικά συμπαγής μιας και κάθε $x \in M$ υπάρχει μια γειτονιά U που είναι ομοιομορφική με την ανοικτή μοναδιαία μπάλα στο $\mathbb{R}^n$. Παίρνουμε λοιπόν το U να είναι ομοιομορφικό με μια μικρότερη μπάλα, οπότε τότε το $\bar{U}$ είναι συμπαγές. Αφού η M είναι Hausdorff, τότε το $\bar{U}$ είναι κλειστό (σε τοπολογικούς χώρους Hausdorff η συμπάγεια έπεται κλειστότητα).

2. Η M έχει μια αριθμήσιμη βάση από ανοικτά σύνολα $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, οπότε $x \in U_j \subset U$ και το $\bar{U_j} \subset \bar{U}$ είναι συμπαγές οπότε η M έχει μια αριθμήσιμη βάση από ανοικτά με $\bar{U_j}$ συμπαγή.

3. Θέτουμε $G_1 = U_1$. Τότε

$$\bar{G}_1 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j,$$

οπότε από την συμπάγεια υπάρχει $k > 1$ τέτοιο ώστε

$$\bar{G}_1 \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j = G_2.$$

Τώρα παίρνουμε την θήκη του G_2 και κάνουμε το ίδιο. Θα πάρουμε συμπαγή σύνολα $\bar{G}_j$ με

$$\bar{G}_j \subset G_{j+1}$$

και προφανώς

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$$

4. Εκ κατασκευής έχουμε

$$\bar{G}_j - G_{j-1} \subset G_{j+1} - \bar{G}_{j-2}$$

και το σύνολο στο αριστερό μέλος είναι συμπαγές ενώ αυτό στο δεξί μέλος είναι ανοικτό. Τώρα παίρνουμε την δοθείσα ανοικτή κάλυψη $\{V_a\}$. Τα σύνολα $V_a \cap (G_{j+1} - \bar{G}_{j-2})$ καλύπτουν το $\bar{G}_j - G_{j-1}$. Το δεύτερο σύνολο είναι συμπαγές οπότε παίρνουμε μια πεπερασμένη υποκάλυψη και μετά συνεχίζουμε αντικαθιστώντας το j με $j+1$. Η διαδικασία αυτή δίδει μια αριθμήσιμη τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση (refinement) της αρχικής κάλυψης $\{V_a\}$, δηλαδή κάθε $V_a \cap (G_{j+1} - \bar{G}_{j-2})$ αποτελεί ανοικτό υποσύνολο του V_a και είναι τοπικά πεπερασμένη διότι

$$G_{j+1} - \bar{G}_{j-2} \cap G_{j+4} - \bar{G}_{j+1} = \emptyset.$$

5. Για κάθε $x \in M$, έστω j ο μέγιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο $x \in M - \bar{G}_j$. Τότε $x \in V_a \cap (G_{j+2} - \bar{G}_{j-1})$. Παίρνουμε ένα σύστημα συντεταγμένων εντός αυτού του ανοικτού συνόλου και μια bump function f η οποία να είναι ταυτοτικά 1 σε μια γειτονιά W_x του x.

6. Τα W_x καλύπτουν το $\bar{G}_{j+1} - G_j$ οπότε καθώς το x διατρέχει τα σημεία του $G_{j+2} - \bar{G}_{j-1}$ παίρνουμε μια ανοικτή κάλυψη οπότε λόγω της συμπάγειας μπορούμε να εξάγουμε μια πεπερασμένη υποκάλυψη. Εκτελούμε αυτή τη διαδικασία για κάθε j και αποκτάμε μια αριθμήσιμη συλλογή από λείες συναρτήσεις

ψ_i με $\psi_i \geq 0$ και αφού τα σύνολα των υποστηριγμάτων είναι τοπικά πεπερασμένα θα έχουμε ότι η

$$\psi := \sum_i \psi_i$$

αποτελεί μια καλά ορισμένη λεία συνάρτηση της M. Επιπλέον

$$supp\psi_i \subset V_a \cap (G_m - \bar{G}_{m-3}) \subset V_a,$$

οπότε κάθε υποστήριγμα περιέχεται σε κάποιο V_a. Τελικά ορίζουμε

$$\phi_i := \frac{\psi_i}{\psi}$$

η οποία αποτελεί την ζητούμενη διαμέριση της μονάδας. $\square$

10.5 Το Θεώρημα Sard (Ειδική περίπτωση)

Θεώρημα 10.9 Έστω M και N διαφορίσιμες πολλαπλότητες της ιδίας διάστασης n και έστω $F : M \to N$ μια λεία απεικόνιση. Τότε το σύνολο των κριτικών τιμών της F έχει μέτρο μηδέν στην N. Πιο συγκεκριμένα κάθε λεία απεικόνιση F έχει τουλάχιστον μία κανονική τιμή.

Απόδειξη: Επειδή μια αριθμήσιμη ένωση συνόλων με μέτρο μηδέν έχει επίσης μέτρο μηδέν και οι M και N διαθέτουν μια αριθμήσιμη βάση ανοικτών συνόλων, αρκεί να θεωρήσουμε την τοπική περίπτωση της $F : U \to \mathbb{R}^n$. Επιπλέον αφού το U αποτελείται από μια αριθμήσιμη ένωση συμπαγών κύβων χρειάζεται μόνο να αποδείξουμε ότι η εικόνα του συνόλου των κριτικών σημείων στον συμπαγή κύβο $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1\}$ έχει μέτρο μηδέν.

Υποθέτουμε τώρα πως το $a \in K$ αποτελεί ένα κριτικό σημείο τέτοιο ώστε η εικόνα DF_a να περιέχεται σε έναν γνήσιο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$, οπότε θα μηδενίζεται από μια γραμμική μορφή f. Έστω $H \subset \mathbb{R}^n$ η υπερεπιφάνεια $f(x-F(a)) = 0$. Τότε

$$d(F(x), H) \leq ||F(x) - [F(a) + DF_a(x-a)]||.$$

Από την άλλη μεριά όμως αφού η F είναι κλάσης C^∞, από το θεώρημα Taylor προκύπτει ότι υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε

$$||F(x) - F(y) - DF_y(x-y)|| \leq C||x-y||^2$$

$\forall x, y \in K$ αφού ο K είναι συμπαγής. Αντικαθιστώντας στην

$$d(F(x), H) \leq ||F(x) - [F(a) + DF_a(x-a)]||.$$

θα πάρουμε

$$d(F(x), H) \leq C||x-a||^2.$$

Εάν $||x-a|| \leq \eta$, τότε $d(F(x), H) \leq C\eta^2$. Έστω $M := sup\{||DF_x|| : x \in K\}$, τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής

$$||F(x) - F(a)|| \leq M||x-a||$$

για $x, a \in K$ οπότε $d(F(x), F(a)) \leq M\eta$. Συνεπώς το $F(x)$ βρίσκεται στην τομή μια φέτας με πάχος $2C\eta^2$ γύρω από το H και μιας μπάλας με ακτίνα $M\eta$ και κέντρο το $F(a)$. Βάζοντας την μπάλα μέσα σε ένα κύβο ακμής $2M\eta$, ο όγκος αυτής της τομής θα είναι μικρότερος από

$$2C\eta^2(2M\eta)^{n-1} = 2^n CM^{n-1}\eta^{n+1}.$$

Στη συνέχεια υποδιαιρούμε τον κύβο σε N^n κύβους με ακμή $1/N$ και επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα για κάθε μικρό κύβο. Αφού τώρα $||x-y|| \leq \sqrt{n}/N$, τα κριτικά σημεία σε αυτό τον κύβο θα βρίσκονται εντός όγκου που θα είναι μικρότερος από

$$2^n CM^{n-1}(\frac{\sqrt{n}}{N})^{n+1}.$$

Επειδή υπάρχουν το πολύ N^n τέτοιοι όγκοι, ο συνολικός όγκος θα είναι μικρότερος από

$$\frac{2^n M^{n-1} Cn^{(n+1)/2}}{N},$$

ποσότητα που τείνει στο μηδέν καθώς το N τείνει στο άπειρο. Συνεπώς το σύνολο των κριτικών σημείων έχει μέτρο μηδέν. $\square$

Αναφορές

[1] Barden, D. and Thomas, C.: *"An Introduction to Differentiable Manifolds"*, Imperial College Press (2006) (πολύ καλό βιβλίο).

[2] Kobayashi, S. and Nomizu, K.: *Differential Geometry*, Volume I, Springer (2003).

[3] Griffiths, R. and Harris, J.: *Complex Algebraic Geometry*, Springer, (2000).

[4] Bott, R. and Tu, J.W.A. : *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, (1984).

[5] Warner, F. : *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer, (1983) .