Θεολογία και Θεμελιώδεις Επιστήμες Ι: Θεολογία και Μαθηματική Λογική

Ιωάννης Π. Ζώης
E-mail: `i.zois@exeter.oxon.org`

17 Νοεμβρίου 2009

Ας υποθέσουμε πως κάποιος κάνει την εξής "περίεργη" γενική ερώτηση:

Έχει κάθε πρόβλημα λύση;

Τι θα απαντούσαμε; Οι περισσότεροι άνθρωποι νομίζουν ότι κάθε πρόβλημα έχει (τουλάχιστον) μια λύση (κάποια προβλήματα μπορεί να έχουν και περισσότερες από μία λύσεις). Είναι όμως αυτό σωστό; Η απάντηση είναι *ΟΧΙ*. Φαίνεται ότι οι ερωτήσεις είναι περισσότερες από τις απαντήσεις.

Ο **Kurt Gödel** (Κουρτ Γκέντελ, 1906-1978) ήταν ένας Αυστριακός μαθηματικός (η γεννέτειρά του σήμερα ανήκει στην Τσεχία αλλά στις αρχές του 20ου αιώνα ανήκε στην Αυστρουγγαρία). Θεωρείται ο πιο σημαντικός επιστήμονας της μαθηματικής λογικής του 20ου αιώνα και ένας από τους σημαντικότερους όλων των εποχών. Η βασική του συνεισφορά στην μαθηματική λογική είναι ένα ζευγάρι θεωρημάτων που είναι γνωστά ως τα περίφημα **θεωρήματα μη - πληρότητας**, τα οποία δημοσίευσε το 1931, όταν ήταν 25 ετών, ένα χρόνο μετά την ολοκλήρωση της διδακτορικής του διατριβής στο πανεπιστήμιο της Βιέννης. Ο Gödel άρχισε την καριέρα του σπουδάζοντας θεωρητική φυσική αλλά σύντομα στράφηκε προς την μαθηματική λογική. Επηρεάστηκε κυρίως από τα συγγράμματα των I. Kant και B. Russell. Διατηρούσε φιλική σχέση με τον A. Einstein κατά το διάστημα που βρίσκονταν και οι δύο στο Ινστιτούτο Ανωτέρων Σπουδών στο Πρίνστον της Αμερικής. Δυστυχώς είχε λυπηρό τέλος: Αν και ήταν πάντα ως ένα βαθμό εκκεντρικός (για παράδειγμα συνήθιζε ακόμη και το καλοκαίρι να φορά ένα μακρύ παλτό), τα τελευταία χρόνια της ζωής του έπασχε από παράνοια και μεταξύ των εμμονών του ήταν πως κάποιοι άγνωστοι

προσπαθούν να τον δολοφονήσουν δηλητηριάζοντας την τροφή του. Αρνιόταν να φάει με αποτέλεσμα να πεθάνει από ασιτία στο νοσοκομείο του Πρίνστον το 1978.

Αποφεύγοντας τους τεχνικούς όρους και χρησιμοποιώντας απλές λέξεις, τα θεωρήματα μη - πληρότητας λένε τα εξής:

Για κάθε υπολογίσιμο σύστημα λογικών αξιωμάτων το οποίο είναι τουλάχιστον επαρκές για να περιγράψει την βασική αριθμητική των φυσικών αριθμών (δηλαδή την αριθμητική των φυσικών αριθμών που μαθαίνουμε στο Δημοτικό Σχολείο που περιλαμβάνει τις 4 βασικές πράξεις: Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση, στα μαθηματικά αυτό αποκαλείται *αριθμητική Peano)*, τότε:

1. *Εάν το σύστημα είναι συνεπές, τότε δεν μπορεί να είναι πλήρες* (αυτό αναφέρεται ως το πρώτο θεώρημα μη - πληρότητας).

2. *Η συνέπεια των αξιωμάτων δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσω του συστήματος.*

Ας εξηγήσουμε λιγάκι τα θεωρήματα: Ένα λογικό σύστημα είναι *συνεπές* όταν **δεν** έχει αντιφάσεις, δηλαδή μια πρόταση δεν είναι ταυτόχρονα αληθής και ψευδής ενώ ένα λογικό σύστημα λέγεται *πλήρες* εάν **κάθε** πρόταση μπορεί να χαρακτηρισθεί αληθής ή ψευδής. Το (πρώτο) θεώρημα μη - πληρότητας λέει ότι εάν ένα σύστημα είναι συνεπές, τότε δεν μπορεί να είναι πλήρες, δηλαδή θα υπάρχουν κάποιες προτάσεις, (τουλάχιστον μία), για τις οποίες δεν θα μπορούμε να αποφανθούμε εάν είναι αληθείς ή ψευδείς. Οι προτάσεις αυτές λέγονται π_1 - προτάσεις. Ο λόγος που αποκαλείται θεώρημα μη - πληρότητας είναι ο εξής: Έστω ότι έχουμε ένα λογικό σύστημα που είναι συνεπές. Τότε θα υπάρχει τουλάχιστον μία π_1 - πρόταση. Έστω ότι έχουμε ακριβώς μία π_1 - πρόταση. Δίδουμε σε αυτή την πρόταση αυθαίρετα την τιμή αληθείας *αληθής* και την ενσωματώνουμε στο αρχικό σύστημα ως ένα επιπλέον αξίωμα. Έτσι θα έχουμε ένα καινούργιο εκτεταμένο λογικό σύστημα. Το θεώρημα μη - πληρότητας όμως εφαρμόζεται εκ νέου για το καινούργιο λογικό σύστημα οπότε και για αυτό θα υπάρχει τουλάχιστον μια π_1 - πρόταση. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρον, οπότε τα συνεπή λογικά συστήματα δεν είναι ποτέ πλήρη. Το θεώρημα λέγει πως ένα σύστημα μπορεί να είναι πλήρες *μόνο* εάν έχει λογικές αντιφάσεις, δηλαδή δεν είναι συνεπές. Πρόκειται για εντυπωσιακό θεώρημα!

Το δεύτερο μέρος του θεωρήματος δηλώνει πως δεν μπορούμε ούτε καν να αποδείξουμε την συνέπεια ενός λογικού συστήματος στηριζόμενοι μόνο στα

αξιώματα του εν λόγω λογικού συστήματος (κάτι που ίσως μεγαλώνει την απογοήτευσή μας...)

Στην επιστήμη (αλλά και στις διαπροσωπικές μας σχέσεις, ακόμη και στην πολιτική), προτιμάμε συνήθως την συνέπεια μιας και *μια επιστημονική θεωρία που είναι ασυνεπής δεν μπορεί να κάνει αξιόπιστες προβλέψεις.* Τότε όμως η θεωρία αναπόδραστα δεν θα είναι πλήρης, δηλαδή θα αφήνει οπωσδήποτε αναπάντητα ερωτήματα. Αντιθέτως, εάν επιμείνουμε στην πληρότητα, (δηλαδή θέλουμε πάντα απάντηση εάν μια πρόταση είναι αληθής ή ψευδής), τότε χάνουμε τη συνέπεια και το λογικό σύστημα θα έχει αντιφάσεις. *Κάντε την επιλογή σας, και τα δύο, συνέπεια και πληρότητα, δεν είναι ταυτόχρονα εφικτά!*

Αξίζει μια κουβέντα για την απόδειξη του θεωρήματος: Είναι εκτεταμένη και πολύπλοκη (η απόδειξη καλύπτει αρκετές δεκάδες σελίδων) και βασίζεται σε μια μέθοδο που αργότερα ονομάστηκε *απαρίθμηση Gödel* και η οποία με τη σειρά της στηρίζεται στο περίφημο *διαγώνιο επιχείρημα* του Georg Cantor μέσω του οποίου αποδεικνύεται ότι ο πληθάριθμος των πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο των ακεραίων (και των φυσικών) αριθμών. Αρχικά για να αποφύγει παράδοξα τύπου Ράσελ (βλέπε παρακάτω), ο Γκέντελ κάνει προσεκτική διάκριση μεταξύ *μαθηματικών* (όπως η πρόταση $1+1=2$) και *μετα-μαθηματικών* (δηλαδή προτάσεων **για** τα μαθηματικά όπως η πρόταση "*τα μαθηματικά είναι ενδιαφέροντα*"). Στην συνέχεια αποδεικνύει ότι κάθε μαθηματική πρόταση μπορεί να αριθμηθεί με κάποιον αριθμό που λέγεται *αριθμός Γκέντελ* της συγκεκριμένης πρότασης ενώ για τα μετα-μαθηματικά αποδυκνείει ότι κάθε πρόταση των μετα-μαθηματικών (όπως η πρόταση "*η ακολουθία των τύπων A αποτελεί απόδειξη του τύπου B*") μπορεί να εκφρασθεί ως αριθμητική σχέση των αριθμών Γκέντελ των προτάσεων A και B, συνεπώς τα μετα-μαθηματικά μπορούν να απεικονισθούν στην αριθμητική. Για να ολοκληρώσει την απόδειξη κατασκευάζει μια αυτοαναφορική πρόταση η οποία είναι αληθής αν και μόνο αν είναι μη αποδείξιμη. Με την παραπάνω απεικόνιση των μετα-μαθηματικών στην αριθμητική αυτό αντιστοιχεί σε μια σχέση μεταξύ φυσικών αριθμών η οποία όμως δεν μπορεί να προέλθει από τα αξιώματα. Ο συγγραφέας του άρθρου θυμάται πως ως μεταπτυχιακός ερευνητικός φοιτητής στην Οξφόρδη παρακολούθησε ένα ολόκληρο τριμηνιαίο μάθημα (με διδάσκοντα τον περίφημο καθηγητή *Isaacson*) που η ύλη του περιείχε μόνο τις αποδείξεις των θεωρημάτων μη - πληρότητας. Αναφέρουμε επίσης ως ιστορικό στοιχείο πως όταν εμφανίστηκαν τα θεωρήματα του Gödel στην κυριολεξία "συνέτριψαν" το πρόγραμμα του μεγάλου γερμανού μαθηματικού D. Hilbert που υποστήριζε πως αρκεί ένα σύστημα αξιωμάτων για να περιγράψει όλα τα μαθηματικά.

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα π_1 - προτάσεων, ίσως το πιο απλό και το

πιο γνωστό είναι το περίφημο *Ευκλείδειο Αίτημα* (ή αίτημα της παραλληλίας, γνωστό από το Γυμνάσιο) που λέγει ότι από σημείο εκτός ευθείας μόνο μία παράλληλη προς την αρχική ευθεία μπορούμε να φέρουμε (σημειώνουμε πως αυτή δεν είναι η αυθεντική διατύπωση που υπάρχει στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη αλλά είναι μια ισοδύναμη μεταγενέστερη που οφείλεται στον Playfair που είναι πιο καθαρή). Σήμερα γνωρίζουμε πως η πρόταση αυτή δεν μπορεί να αποδειχθεί ούτε να απορριφθεί με βάση τα υπόλοιπα 4 αξιώματα του Ευκλείδη, δεν μπορούμε στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γωμετρίας να αποδείξουμε ούτε ότι είναι αληθής ούτε ότι είναι ψευδής. Όσοι ασχολούνται με την γεωμετρία γνωρίζουν ότι το Ευκλείδειο αίτημα απασχόλησε πολλούς μεγάλους μαθηματικούς ανά τους αιώνες και η τελική απάντηση δόθηκε μόλις τον 18ο αιώνα (δηλαδή περισσότερο από 20 αιώνες μετά τον Ευκλείδη), σχεδόν ανεξάρτητα από τους J. Bolyai, K.-F. Gauss, N. Lobachevsky.

Δύο επιπλέον σημαντικά παραδείγματα π_1 - προτάσεων έρχονται από την μαθηματική λογική: Όπως απέδειξε την δεκαετία του 1960 ο P. J. Cohen, τόσο η *υπόθεση του συνεχούς* (που λέγει πως δεν υπάρχουν σύνολα με πληθάριθμο μεταξύ $\aleph_0$ και $\aleph_1$) όσο και το *αξίωμα της επιλογής* (η απλούστερη έκφραση αυτού είναι ότι κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης έχει μια βάση), δεν μπορούν να αποδειχθούν ούτε ότι είναι ψευδείς ούτε ότι είναι αληθείς προτάσεις με βάση τα αξιώματα Zermelo-Fraenkel της αξιωματικής θεωρίας συνόλων (οι παραπάνω αποδείξεις του P. J. Cohen θεωρούνται από πολλούς ως η δεύτερη σημαντικότερη συνεισφορά στην μαθηματική λογική κατά τον 20ο αιώνα).

Τα θεωρήματα μη - πληρότητας έχουν βαθειές συνέπειες όχι μόνο για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες αλλά και για την φιλοσοφία, την επιστήμη των υπολογιστών, τις γνωστικές επιστήμες, την ψυχολογία κλπ, συνέπειες που όπως έχει επισημανθεί από μεγάλους σύγχρονους φιλοσόφους (σαν τον J. R. Lucas) και μαθηματικούς (σαν τον R. Penrose) δεν έχουν ακόμη μελετηθεί πλήρως. Θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει χωρίς να είναι μακριά από την πραγματικότητα πως τα θεωρήματα μη πληρότητας αποτελούν μια πιο αυστηρή και πιο συνοπτική μορφή των θέσεων του L. Wittgenstein που ανέπτυξε στο περίφημο Tractatus, έργο σταθμό για την φιλοσοφία του 20ου αιώνα. Επίσης οι εργασίες του Jacques Derrida πάνω στην *θεωρία αποδόμησης* (θεωρία λογοτεχνίας και φιλοσοφία), κατά την ομολογία του ιδίου του Derrida σε προσωπική συνομιλία με τον γράφοντα κατά το παρελθόν, σχετίζονται άμεσα με τα θεωρήματα μη-πληρότητας, άλλωστε ο Derrida είχε σπουδάσει και μαθηματικά. Γενικότερα, στον ορισμό του J.-F. Lyotard ότι η μετανεωτερική συνθήκη είναι η δυσπιστία στις μετα-αφηγήσεις, θα μπορούσαμε να παραθέσουμε το σχόλιο του V. Tasic πως τα μαθηματικά ανήκουν στις πιο επίμονες μετα-αφηγήσεις της

Δυτικοευρωπαϊκής κουλτούρας. Όσον αφορά την φυσική, μεγάλοι σύγχρονοι θεωρητικοί φυσικοί όπως ο Steven Winberg (βραβείο Νομπέλ 1979, ένας από τους πατέρες του λεγόμενου *στάνταρ μοντέλου* της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων που ενοποίησε τις ηλεκτρομαγνητικές και τις ασθενείς πυρηνικές αλληλεπιδράσεις), ο γνωστός *Stephen Hawking* κλπ, παραδέχονται πλέον πως μια *φυσική θεωρία των πάντων*, ακόμη και εάν κάτι τέτοιο τελικά υπάρχει, (πχ θεωρία υπερχορδών/Μ-Θεωρία, συστροφική γεωμετρία), θα είναι *μαθηματικά ασυνεπής* λόγω των θεωρημάτων μη-πληρότητας (με όσα αρνητικά αυτό συνεπάγεται, ειδικά για την κβαντική βαρύτητα).

Τα θεωρήματα του Gödel έχουν άμεση σχέση με την εργασία του μεγάλου Άγγλου μαθηματικού A. Turing, του πατέρα της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών, (και του ανθρώπου που έσπασε τους κώδικες των γερμανικών υποβρυχίων κατά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο συμβάλλοντας αποφασιστικά στη νίκη των συμμάχων κατά του Άξονα), και πιο συγκεκριμένα με το λεγόμενο *πρόβλημα του τερματισμού (Entscheidungsproblem)*, αλλά και με πολλά προβλήματα των μαθηματικών (όπως για παράδειγμα με το πρόβλημα Whitehead στην Κ-Θεωρία, το πρόβλημα των λέξεων στις πεπερασμένα παρουσιασμένες ομάδες, το πρόβλημα Donaldson της κατηγοριοποίησης των πολλαπλοτήτων διάστασης 4 και την ύπαρξη εξωτικών δομών κλπ). Όλα αυτά δεν είναι παρά μερικά επιπλέον παραδείγματα π_1 - προτάσεων. Επιπρόσθετα τα θεωρήματα του Gödel έχουν άμεση σχέση και με το *παράδοξο του ψεύτη*:
"Η παρακάτω πρόταση είναι ψευδής "
"Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής ",
αλλά και με το γνωστό παράδοξο του Russell (μια διασκεδαστική έκδοση του οποίου είναι το παράδοξο του κουρέα: "Ο κουρέας ξυρίζει μόνο όσους δεν μπορούν να ξυριστούν μόνοι τους, ποιος ξυρίζει τον κουρέα;") Κάποια από τα παράδοξα αυτά έχουν τις ρίζες τους στους αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους: Τον 6ο αιώνα π.Χ ο φιλόσοφος και ποιητής Επιμενίδης που ήταν από την Κρήτη, έγραψε "Όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες " ενώ ο φιλόσοφος Ευβουλίδης από την Μίλητο τον 4ο αιώνα π.Χ έγραψε: "Κάποιος λέει ότι ψεύδεται. Αυτό που λέει είναι αλήθεια ή ψέμματα;" Ας μην ξεχάσουμε και την κλασική φράση που αποδίδεται στον Σωκράτη: "*Εν οίδα, ότι ουδέν οίδα*". Επίσης αυτο-αντιφατικές ερωτήσεις όπως: *"Μπορεί ο παντοδύναμος Θεός να δημιουργήσει μια πέτρα τόσο μεγάλη που να μην μπορεί να την σηκώσει;"* υποδηλώνουν αδυναμία της ανθρώπινης λογικής (παρά του... Θεού). Στο σημείο όμως αυτό δεν μπορούμε να αντισταθούμε στον πειρασμό να αναφέρουμε και την φράση του Απ. Παύλου: "*Βλέπετε μη τις υμάς έσται ο συλαγωγών δια της φιλοσοφίας και κενής απάτης, κατά την παράδοσιν των ανθρώπων, κατά τα στοιχεία του κόσμου και ου κατά Χριστόν*". (προς Κολασσαείς, Κεφ. Β στίχος 8).

Ο K. Gödel ήταν πιστός χριστιανός (άνηκε στην Ρωμαιοκαθολική Εκκλησία). Το 1970 σκέφθηκε ένα *οντολογικό επιχείρημα υπερ της ύπαρξης του Θεού*, το οποίο αποτελούσε μια βελτίωση ενός παρόμοιου επιχειρήματος του Αγίου Άνσελμου αρχιεπισκόπου του Καντέρμπουρη (1033 - 1109), και το οποίο δεν δημοσίευσε ποτέ όσο ζούσε αλλά επανειλημμένα το είχε επιδείξει σε διάφορους φίλους του. Πρωτοδημοσιεύθηκε μόλις το 1987, εννέα χρόνια μετά τον θάνατό του. Ο ίδιος ο Gödel μάλιστα το θεωρούσε *απόδειξη* της ύπαρξης του Θεού αλλά εμείς είμαστε πιο μετριοπαθείς και το αναφέρουμε ως επιχείρημα υπέρ της ύπαρξης του Θεού.

Το αρχικό οντολογικό επιχείρημα του Αγίου Άνσελμου ήταν το εξής (Προσλόγιον II, μετάφραση από τα Λατινικά):

"...Έτσι, ακόμη και ο άφρων είναι πεπεισμένος πως, τουλάχιστον διανοητικά, υπάρχει κάτι ανώτερο του οποίου δεν μπορεί να συλληφθεί. Διότι όταν το ακούει, το καταλαβαίνει. Και ο,τιδήποτε γίνεται κατανοητό υπάρχει διανοητικά. Και πείθεται ότι αυτό, ανώτερο του οποίου δεν υπάρχει, δεν μπορεί να υπάρχει μόνο διανοητικά. Διότι, ας υποθέσουμε πως υπάρχει μόνο διανοητικά: τότε μπορεί να συλληφθεί διανοητικά πως υπάρχει και στην πραγματικότητα, κάτι το οποίο είναι ανώτερο. Συνεπώς εάν εκείνο, ανώτερο του οποίου δεν υπάρχει, υπάρχει μόνο διανοητικά, υπάρχει κάτι ανώτερο αυτού του οποίου ανώτερο δεν υπάρχει, κάτι που είναι αδύνατον..."

Μπορούμε να γράψουμε το επιχείρημα χρησιμοποιώντας την *εις άτοπον απαγωγή* μέσω των παρακάτω βημάτων:
1. Ο Θεός εξ ορισμού είναι το υπέρτατο Ον, δηλαδή το Ον ανώτερο του οποίου δεν μπορεί να συλληφθεί διανοητικά.
2. Η έννοια του Θεού υπάρχει στην ανθρώπινη διάνοια.
3. Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο παρακάτω) ότι ο Θεός υπάρχει μόνο διανοητικά και όχι στην πραγματικότητα.
4. Η έννοια του Θεού που υπάρχει και στην πραγματικότητα υπάρχει στην ανθρώπινη διάνοια.
5. Ένα Ον που υπάρχει στην ανθρώπινη διάννοια αλλά και στην πραγματικότητα είναι ανώτερο ενός Όντος που υπάρχει μόνο διανοητικά.
6. Από τα βήματα $1, 2, 3, 4$ και 5 προκύπτει πως μπορεί να συλληφθεί διανοητικά η ύπαρξη ενός Όντος ανώτερου του Θεού (που εξ ορισμού από το 1 είναι το ανώτερο Ον που μπορεί διανοητικά να συλληφθεί), κάτι που όμως αποτελεί *άτοπο*.
7. Συνεπώς η υπόθεση 3 είναι λάθος, οπότε ο Θεός υπάρχει και στην πραγματικότητα.

Σημειώνουμε εδώ ότι το βήμα που δέχθηκε την μεγαλύτερη κριτική από τους φιλοσόφους στο πέρασμα των αιώνων ήταν το 5 παραπάνω (πιο συγκεκριμένα η έννοια της ανωτερότητας). Διάφορα οντολογικά επιχειρήματα υπερ της ύπαρξης του Θεού εμφανίστηκαν αργότερα, ίσως τα πιο γνωστά είναι αυτά του R. Descartes και του G. Leibniz. Εμφανίστηκαν βέβαια και *παρωδίες* των οντολογικών επιχειρημάτων.

Η κατά K. Gödel βελτίωση και εξέλιξη του επιχειρήματος του Ανσέλμου είναι η εξής (για την κατανόηση απαιτείται κάποια εξοικείωση με την σύγχρονη *εγκλιτική λογική*–modal logic):

Ορισμός 1. Το x έχει την *θεοειδή ιδιότητα* εάν και μόνο εάν το x έχει ως ουσιώδεις ιδιότητες εκείνες και μόνο εκείνες τις ιδιότητες που είναι θετικές.
Ορισμός 2. Μια ιδιότητα A αποτελεί μια *ουσία* του x εάν και μόνο εάν για κάθε ιδιότητα B, το x έχει αναγκαστικά την ιδιότητα B εάν και μόνο εάν η A συνεπάγεται την B.
Ορισμός 3. Το x αναγκαστικά υπάρχει εάν και μόνο εάν κάθε ουσία του x αναγκαστικά εξηγείται με κάποιο παράδειγμα.
Αξίωμα 1. Εάν μια ιδιότητα είναι θετική, τότε η άρνησή της δεν είναι θετική.
Αξίωμα 2. Κάθε ιδιότητα που συνεπάγεται από μια θετική ιδιότητα είναι επίσης θετική.
Αξίωμα 3. Η ιδιότητα του να είναι κάτι θεοειδές είναι θετική.
Αξίωμα 4. Εάν μια ιδιότητα είναι θετική τότε είναι και αναγκαστικά θετική.
Αξίωμα 5. Η αναγκαία ύπαρξη είναι θετική ιδιότητα.
Αξίωμα 6. Για κάθε ιδιότητα P, εάν η P είναι θετική, τότε το να έχει κάτι αναγκαστικά την ιδιότητα P είναι επίσης θετική ιδιότητα.
Θεώρημα 1. Εάν μια ιδιότητα είναι θετική, τότε είναι συνεπής (δηλαδή πιθανώς εξηγείται με κάποιο παράδειγμα).
Πόρισμα 1. Η θεοειδής ιδιότητα είναι συνεπής.
Θεώρημα 2. Εάν κάτι έχει την θεοειδή ιδιότητα, τότε η θεοειδής ιδιότητα αποτελεί μια ουσία αυτού.
Θεώρημα 3. Αναγκαστικά η θεοειδής ιδιότητα εξηγείται με κάποιο παράδειγμα.

Για τους ειδικούς, χρησιμοποιώντας *Συμβολική Λογική*, το παραπάνω Οντολογικό Επιχείρημα του K. Gödel γράφεται ως εξής (αυτή είναι και η μορφή που το οντολογικό επιχείρημα υπάρχει στις προσωπικές σημειώσεις του ιδίου του K. Gödel):

Αξ. 1. $\bullet\, \forall x\{[\varphi(x) \to \psi(x)] \wedge P(\varphi)] \to P(\psi)\}$
Αξ. 2. $P(\neg\varphi) \iff \neg P(\varphi)$
Τη. 1. $P(\varphi) \to \Diamond\, \exists x\, [\varphi(x)]$
Δφ. 1. $G(x) \leftrightarrow \forall\varphi[P(\varphi) \to \varphi(x)]$
Αξ. 3. $P(G)$
Τη. 2. $\Diamond\, \exists x\, G(x)$
Δφ. 2. $\varphi\ ess\ x \iff \varphi(x) \wedge \forall\psi\{\psi(x) \to \bullet\, \forall x[\varphi(x) \to \psi(x)]\}$
Αξ. 4. $P(\varphi) \to \bullet\, P(\varphi)$
Τη. 3. $G(x) \to G\ ess\ x$
Δφ. 3. $E(x) \leftrightarrow \forall\varphi[\varphi\ ess\ x \to \bullet\, \exists x\, \varphi(x)]$
Αξ. 5. $P(E)$
Τη. 4. $\bullet\, \exists x\, G(x)$

Ας κάνουμε τώρα ορισμένα σχόλια σχετικά με την Θεολογία και ειδικά την Ορθόδοξη Θεολογία: Κατ' αρχή η χρησιμότητα των οντολογικών επιχειρημάτων για την χριστιανική ομολογία είναι αμφίβολη: Η μόνη γνωστή περίπτωση ανθρώπου που παραδέχθηκε πως έγινε χριστιανός μελετώντας το παραπάνω οντολογικό επιχείρημα του Αγίου Άνσελμου (το αναφέρει ο ίδιος στην αυτοβιογραφία του), είναι του γνωστού συγγραφέα και καθηγητή στην Οξφόρδη C. S. Lewis (1898 - 1963) (συγγραφέα μεταξύ άλλων του εξαιρετικού βιβλίου που μεταφράστηκε και στα ελληνικά με τον τίτλο "Η Τακτική του Διαβόλου"). Επίσης η διαφορά ανάμεσα στη χριστιανική πίστη και τη θρησκεία είναι η εξής: Στην πρώτη ο Θεός προσεγγίζει τον άνθρωπο, ενώ στη δεύτερη συμβαίνει το αντίθετο. Θα μπορούσε να υποθέσει κανείς ότι στην περίπτωση της θρησκείας είναι ο φόβος που γεννά το Θεό και σε κάθε περίπτωση ο Θεός είναι μία πατρική φιγούρα παράγωγο ενστίκτου. Αναλογικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο Θεός της οντολογικής απόδειξης είναι παράγωγο συλλογισμού και ίσως θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι στο βάθος είναι *αποκύημα ενστίκτου κυριαρχίας μέσω του ορθού λόγου*. (Για παράδειγμα η αθεϊα του Νίτσε δεν είναι παρά το αναπόδραστο συμπέρασμα του *σκέφτομαι άρα υπάρχω* του Καρτέσιου).

Ωστόσο, ο χριστιανικός Θεός δεν είναι παράγωγο αλλά *αποκάλυψη*, η οποία συνέβη σε συγκεκριμένο χρόνο και τόπο με όρους *εμπειρικούς*. Οι πατέρες της εκκλησίας (σαν τον Άγιο Μάξιμο τον Ομολογητή) γνώρισαν τον Θεό ως Πρόσωπο και στη συνέχεια έγραψαν τα θεολογικά κείμενα. Και επιπλέον η αποκάλυψη είναι συστατικό της υπόστασης του χριστιανικού Θεού, όπως αυτή περιγράφεται από το δόγμα της τριαδικότητας. Στην πραγματικότητα η χρήση του κατηγορήματος *ύπαρξη* ίσως δεν ταιριάζει στον Θεό: Η *ύπαρξη* προσδιορίζεται από την παρουσία, η παρουσία είναι το αποτέλεσμα της διευθέτησης των εμπειρικών δεδομένων από τις λογικές κατηγορίες, ένα ενέργημα του νου με το οποίο η πολλαπλότητα αποκτά μορφή (Κάντ) ή η εναπόθεση μορφής ε-

πάνω σε ένα άμορφο υπόβαθρο το οποίο ονομάζεται ύλη (Αριστοτέλης). (Ο όρος *ύλη* χρησιμοποιείται τελείως συμβατικά: Οι περισσότεροι φυσικοί σήμερα θα συμφωνούσαν πως *συνήθης ύλη* είναι ο,τιδήποτε αποτελείται από κουάρκ και λεπτόνια αλλά ένας γενικός ορισμός της ύλης που θα περιλαμβάνει και τις εξωτικές μορφές ύλης της σύγχρονης φυσική είναι εξαιρετικά δύσκολος έως αδύνατος).

Όμως ο Θεός δεν υπόκειται στην απόφαση κάθε λογικής κατηγορίας. Επομένως δεν είναι δυνατή η απόφαση ύπαρξης ή μη ύπαρξης. Ο Άγιος Μάξιμος ο Ομολογητής αναφέρει ότι το αποφατικό «μη είναι» θα ταίριαζε περισσότερο στο Θεό. Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα θα μπορούσαμε να δώσουμε μία αναλογία και να πούμε ότι ο Θεός είναι όπως το κενό σύνολο: Είναι μοναδικό, και παρά το ότι είναι κενό θεμελιώνει τα Μαθηματικά (βλέπε για παράδειγμα τον ορισμό των φυσικών αριθμών με τη χρήση της *θεωρίας τύπων* του B. Russell). Είναι παρόν σε κάθε σύνολο καθώς είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. (Άλλωστε η θεολογία μας μιλά και για την "Θεία Κένωση" του Λόγου κατά την θεία σαρκική Γέννησή Του από την Υπεραγία Θεοτόκο).

Επιπλέον ένα εξίσου σοβαρό πρόβλημα είναι ότι η οντολογική απόδειξη δεν παράγει συγκεκριμένη ηθική θεωρία, όπως αυτή που έχει παραδωθεί μέσα από τη Βίβλο. Γενικότερα δεν προκύπτει μέσα από κάθε οντολογική απόδειξη εκείνο το οποίο ονομάζεται Εκκλησία και που είναι θεμελιωμένο στην ενανθρώπηση του Υιού και Λόγου του Θεού, στην Σταύρωση και την Ανάστασή Του και στην μέλλουσα Κρίση. Συνεπώς τα οντολογικά επιχειρήματα για την Θεολογία έχουν κάποια χρησιμότητα μόνο στο αρχικό στάδιο της πορείας συνάντησης δύο προσώπων (του ανθρώπου και του Θεού): Η χρησιμότητα έγγυται στο ότι υποδηλώνουν πως η έννοια του Θεού απλά δεν *αντιβαίνει* στις αρχές της ανθρώπινης σκέψης αλλά σε καμία περίπτωση δεν προκύπτει από αυτή, είναι κάτι πολύ πάνω, πέρα και έξω από αυτήν.

Άρα λοιπόν: *Η πίστη στον Θεό ούτε προκύπτει αλλά ούτε και αντιβαίνει τις αρχές της λογικής* καθώς σε διάφορα επιχειρήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω υπέρ της ύπαρξης του Θεού υπάρχουν και οι αντίστοιχες παρωδίες αυτών (για το συγκεκριμένο οντολογικό επιχείρημα του Γκέντελ πάντως αξίζει να αναφερθεί ότι τουλάχιστον ο γράφων δεν έχει υπόψη του κάποια παρωδία). Άλλωστε η θεολογία εδώ και αιώνες μας πληροφορούσε ότι η λογική αποτελεί ατελές (αλλά σε καμία περίπτωση άχρηστο) εργαλείο στην προσέγγιση του Θεού. Επίσης οι ιεροί νηπτικοί πατέρες στα συγγράμματά τους (κυρίως στην Φιλοκαλία αλλά και αλλού) υποστηρίζουν ότι το ζήτημα της ύπαρξης/αποδοχής/πίστης του Θεού από τον άνθρωπο δεν είναι θέμα διανοητικό αλλά θέμα καθαρισμού της καρδιάς από τα πάθη, τα πάθη, που έχουν ως βάση την καρδιά, συσκοτίζουν και τον νου

του ανθρώπου. Στην Αγία Γραφή υπάρχει η γνωστή φράση: *"Είπεν άφρων εν τη καρδία αυτού ουκ έστι Θεός"*, δεν είναι τυχαίο που χρησιμοποιείται η λέξη "καρδία" και όχι για παράδειγμα η λέξη "διανοία".

Παραθέτουμε κάποια σχόλια αμέσως παρακάτω και στο τέλος αναφέρουμε μια ενδεικτική βιβλιογραφία για όσους θα ήθελαν να εμβαθύνουν περισσότερο σε κάποιο από τα θέματα που αγγίξαμε στο παρόν σύντομο άρθρο.

Σχόλια:

1. Ιστορικά το πρώτο οντολογικό επιχείρημα υπέρ της ύπαρξης του Θεού θεωρείται αυτό του Αγίου Ανσέλμου Αρχιεπισκόπου του Καντέρμπουρη (αν και κάποια "απολογητικά στοιχεία" υπήρχαν και στα συγγράμματα του ιερού Αυγουστίνου πολύ νωρίτερα αλλά και σε διάφορα απολογητικά έργα κάποιων πατέρων της Εκκλησίας.) Στην συνέχεια εμφανίστηκαν και άλλα οντολογικά επιχειρήματα όπως του *Thomas Acquinas*, του Καρτέσιου (*R.Descartes*), του *Leibniz* ("θεωρία μονάδων" από όπου προέκυψαν και ο λογισμός μεταβολών– calculus of variations– που αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την σύγχρονη φυσική–θεωρίες πεδίων– και από την οποία προκύπτουν η αρχή ελάχιστης δράσης του *Fermat*, η διατήρηση ορμής και ενέργειας, το θεώρημα Nöether κλπ), το λεγόμενο transcendental argument (Tranzendentalen Deduktion) του *I.Kant*, του γνωστού πυρηνικού φυσικού (και πατέρα της πρώτης ατομικής βόμβας) *R.Oppenheimer*, και φτάσαμε τελικά μέχρι τον Gödel. Υπάρχουν όμως και τα λεγόμενα τελεολογικά επιχειρήματα (σε συνδυασμό με την ανθρωπική αρχή και τα fine tuned universes) αλλά και επιχειρήματα υπέρ της ύπαρξης του Θεού που προέρχονται, όλως αναπάντεχα, και από την πληροφορική, την complexity theory (θεωρία πολυπλοκότητας, πχ θεωρία σημείου Ωμέγα, Omega Point Theory,του *F.J.Tipler* σε συνάφεια με το big crunch των θεωρημάτων των χωροχρονικών ανωμαλιών των $Hawking - Penrose$). Επίσης αναφέρουμε πως υπάρχουν και πιο σύγχρονες διατυπώσεις (20ου αιώνα) του αρχικού επιχειρήματος του Ανσέλμου, όπως η διατύπωση κατά *Adams*, *Barnes*, *Lewis*, *Plantinga*, $Oppenheimer - Zaltan$ κλπ που αναιρούν σε μεγάλο βαθμό την κριτική που είχε ασκηθεί στο παρελθόν.

2. *Εάν ο Θεός 'επέτρεπε' να υπάρξει απόδειξη της ύπαρξής Του (διανοητική ή εμπειρική) θα δρούσε σαν να κατέβαινε από το Σταυρό όταν οι Ιουδαίοι Τον περιγελούσαν και Τον προέτρεπαν κατά την Σταύρωση να αυτό-σωθεί με θαύμα για να πιστέψουν.* Η λογική 'δένει' τον σύγχρονο μορφωμένο άνθρωπο (όπως το θαύμα έδενε τον άνθρωπο της τότε εποχής αλλά και της σημερινής). Όπως πολύ εύστοχα γράφει ο Απ. Παύλος (στο πρώτο κεφάλαιο της προς Κορίνθιους πρώτης επιστολής):

'...Ουχί εμώρανεν ο Θεός την σοφίαν του κόσμου τούτου; Επειδή γαρ εν τη σοφία του Θεού ουκ έγνω ο κόσμος δια της σοφίας τον Θεόν, ευδόκησεν ο Θεός δια της μωρίας του κηρύγματος σώσαι τους πιστεύοντας. Επειδή και Ιουδαίοι σημείον ζητούσι και οι Έλληνες σοφίαν ζητούσι, ημείς δε κηρύσσομεν Χριστόν εσταυρωμένον, Ιουδαίοις μεν σκάνδαλον, Έλλησι δε μωρίαν'.

Ο Θεός ζητά την ελεύθερη αποδοχή από τους ανθρώπους και όχι την καταναγκαστική εμπειρική ή ορθολογική αποδοχή. (Θαύματα πάντως μπορεί να γίνονται και σήμερα όπως και πάντοτε αλλά αποτελούν εξαιρέσεις). *Δεν τους ζητά όμως και να γίνουν παράλογοι, δηλαδή να αρνηθούν την δωρεά του Λόγου και να πιστέψουν σε κάτι που αποδεικνύεται πως δεν υπάρχει. Συνεπώς ούτε απόδειξη ύπαρξης ούτε μη ύπαρξης του Θεού είναι δυνατή και αυτό δικαιολογείται θεολογικά γιατί συμβαίνει.* Είναι τουλάχιστον συγκλονιστικός ο σεβασμός που επιδεικνύει ο Θεός στην ελευθερία του ανθρώπου.

Αναφορές:

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης που είναι εξοικειωμένος με τα αναγκαία μαθηματικά, για περισσότερες πληροφορίες μπορεί να συμβουλευθεί *Τα Άπαντα του Kurt Gödel* που δημοσιεύθηκαν το 1994 από τον *Εκδοτικό Οίκο του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης*:

• **Kurt Gödel, Collected Works:**
Volume I: *Publications 1929-1936*,
Volume II: *Publications 1938-1974*,
Volume III: *Unpublished Essays and Lectures*,
Volume IV: *Correspondence*,
Oxford University Press, 1994.

Επίσης ένα πολύ καλό εισαγωγικό βιβλίο για την εγκλιτική λογική είναι το παρακάτω με τίτλο: *Η Φύση της Αναγκαιότητας*, του Alvin Plantinga, *Εκδοτικός Οίκος του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης*:

• *Alvin Plantinga: "The Nature of Necessity"*, Clarendon Library of Logic and Philosophy, Oxford University Press, 1979.

Για την σχέση των μαθηματικών με τη σύγχρονη φιλοσοφία (και ειδικότερα με την εργασία του J.-F. Lyotard περί της μετανεωτερικότητας), ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα μπορούσε να συμβουλευθεί το εξής βιβλίο: *Τα Μαθηματικά και οι Ρίζες της Μετανεωτερικής Σκέψης* του Vladimir Tasic, *Εκδοτικός Οίκος του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης*:

• *Vladimir Tasic: "Mathematics and the Roots of Postmodern Thought"*, Oxford University Press, 2001.

Τέλος περισσότερα για τον Άγιο Μάξιμο Ομολογητή μπορεί κανείς να δει για παράδειγμα την Πατρολογία του Μίν:

• J. P. Migne: *"Patrologiae Cursus Completus (Series Graeca)"*: *Μυσταγωγία*, Αγίου Μαξίμου του Ομολογητού.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον κ. Νικόλαο Φουντουλάκη για την κριτική του σε μια προγενέστερη μορφή του παρόντος άρθρου.

Ιωάννης Π. Ζώης
Μαθηματικός Φυσικός (*M.Sc* Cantab, *D.Phil* Oxon)
E-mail: i.zois@exeter.oxon.org
http://ipzoisscience.googlepages.com/home