Μη Μεταθετικό Θεώρημα Hodge, Ολογραφία και Θεωρίες Ενοποίησης.

Ιωάννης Π. Ζώης
E-mail: i.zois@exeter.oxon.org
Ομιλία στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών,
30 Οκτωβρίου 2009.

21 Νοεμβρίου 2009

Περιεχόμενα

1 Διατύπωση Θεωρημάτων 3

2 Κβαντική Βαρύτητα: Γιατί και γιατί όχι 7

3 Η Αρχή Ολογραφίας του 't Hooft 8

4 Αξιώματα Atiyah για τις ΤΚΘΠ 11

5 Το πείραμα *GEO* 600 και η πρώτη πειραματική επιβεβαίωση της ολογραφίας 14

6 Γιατί χρειαζόμαστε την ΜΜΓ 16

Σύνοψη:

Στις αρχές του τρέχοντος έτους (Ιανουάριος 2009) αναφέρθηκαν τα πρώτα ενθαρρυντικά αποτελέσματα του πειράματος GEO 600 (από τον $C.J.Hogan$) που δείχνουν ότι η αρχή ολογραφίας του $Gerardus\ 'tHooft$ είναι δυνατό να επιβεβαιωθεί πειραματικά. Θα παρουσιάσουμε μια ανασκόπηση της αρχής ολογραφίας στα πλαίσια της κβαντικής βαρύτητας και γενικότερα των τοπολογικών κβαντικών θεωριών πεδίων (ΤΚΘΠ για συντομία, ορισμός $Atiyah$) και στη συνέχεια θα αναφέρουμε τα επιχειρήματα $Connes-Witten$ σύμφωνα με τα οποία η μη-μεταθετική γεωμετρία (ΜΜΓ για συντομία) αποτελεί το κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο για την μελέτη της κβάντωσης του πεδίου βαρύτητας παρουσία επιπλέον πεδίων $Yang-Mills$. Κομβικό ρόλο στην κατασκευή μη-μεταθετικών τοπολογικών κβαντικών θεωριών παίζει το θεώρημα $Hodge$ της ΜΜΓ.

1 Διατύπωση Θεωρημάτων

Στην κλασική γεωμετρία, το Θεώρημα $Hodge$ λέγει το εξής:

Θεώρημα 1. Σε οποιαδήποτε πολλαπλότητα Ρήμαν (M, g) (υποτείθεται λεία, κλειστή, προσανατολίσιμη), κάθε συνομολογιακή κλάση $de\ Rham$ έχει μοναδικό αρμονικό αντιπρόσωπο:

$$\forall[\omega] \in H^i_{dR}(M;\mathbb{R}), \exists!\omega \in \Omega^i(M;\mathbb{R}) : \Delta\omega = 0,$$

όπου

$$\Delta = dd^* + d^*d$$

ο τελεστής $Laplace$.

Από το παραπάνω θεώρημα έπεται ότι κάθε κλειστή διαφορική μορφή γράφεται ως άθροισμα μιας ακριβούς και μιας αρμονικής ενώ *κάθε διαφορική μορφή γράφεται ως άθροισμα μιας αρμονικής συν ένα δεύτερο όρο* (που με τη σειρά του αποτελείται από μια κλειστή και μια συνκλειστή μορφή).

Ας δούμε τι συμβαίνει στην μη μεταθετική γεωμετρία (ΜΜΓ): Η ΜΜΓ ανακαλύφθηκε κατά την δεκαετία 1980-1990 από τον $A.Connes$ (με σημαντική συνεισφορά και από τον $D.Quillen$ αλλά και άλλους) και αποτελεί μια προσπάθεια ενοποίησης της αλγεβρικής και της διαφορικής γεωμετρίας. Το κίνητρο για την ανακάλυψή της προέρχεται και από την κβαντική μηχανική και ως εναρκτήριο σημείο θεωρείται το γνωστό θεώρημα $Gelfand$ που δηλώνει πως η τοπολογία

ενός χώρου συλλαμβάνεται από την άλγεβρα των συναρτήσεων συντεταγμένων αυτού: Ουσιαστικά εγκαθιστά μια ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών των συμπαγών τοπολογικών χώρων $Hausdorff$ (με βέλη τις συνεχείς απεικονίσεις) και της αντίθετης κατηγορίας των **μεταθετικών** C^*-αλγεβρών με μονάδα (με βέλη τους ομομορφισμούς που διατηρούν την μονάδα). Οι συναρτητές είναι το φάσμα $Sp(-)$ μιας C^*-άλγεβρας και το σύνολο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων $C(-)$ ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου. Πιο συγκεκριμένα, δύο μεταθετικές C^*-άλγεβρες είναι ισόμορφες εάν και μόνον εάν τα φάσματά τους είναι ομοιομορφικά. (Στην πρίπτωση που έχουμε μόνο τοπικά συμπαγείς χώρους $Hausdorff$, χάνουμε την μονάδα της μεταθετικής C^*-άλγεβρας και για να διατηρηθεί η ισοδυναμία των παραπάνω κατηγοριών θα πρέπει να θωρήσουμε τις μεταθετικές C^*-άλγεβρες που προκύπτουν από τις συνεχείς μιγαδικές συναρτησεις που μηδενίζονται στο άπειρο). Η ΜΜΓ ουσιαστικά αποτελεί την *επέκταση* της τοπολογικής κατηγορίας για να "ταιριάξει" με τις *μη μεταθετικές* C^*-άλγεβρες (μη-μεταθετικούς δακτυλίους γενικότερα όπως το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων). Συνεπώς οι ΜΜ χώροι περιγράφονται απλά μέσω κάποιας ΜΜ άλγεβρας. Έχουμε λοιπόν τα εξής:

Ορισμός 1. Έστω A προσεταιριστική μιγαδική άλγεβρα με μονάδα, όχι κατ' ανάγκη μεταθετική. Ορίζουμε τις διαφορικές μορφές $\Omega^n(A), n > 0$ της A ως

$$\Omega^n(A) := A \otimes_{\mathbb{C}} \bar{A},$$

όπου

$$\bar{A} = A/\mathbb{C}$$

ενώ

$$\Omega^n(A) = 0, n < 0$$

και

$$\Omega^0(A) = A.$$

Ο παραπάνω ορισμός δίδει μια ταύτηση

$$a_0 da_1 da_2 ... da_n \leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, ..., a_n).$$

Έστω

$$\Omega A := \oplus_n \Omega^n(A).$$

Το ΩA αποτελεί διαφορική διαβαθμισμένη άλγεβρα με πολλαπλασιασμό τον

$$(a_0, a_1, ..., a_n)(a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} (a_0, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_k)$$

για $k > n$ και διαφορικό

$$d : \Omega^n(A) \to \Omega^{n+1}(A)$$

που δίδεται από την

$$d(a_0, a_1, ..., a_n) = (1, a_0, a_1, ..., a_n)$$

ή ισοδύναμα

$$d(a_0 da_1 ... da_n) = da_0 da_1 ... da_n.$$

Επιπρόσθετα έχουμε και το διαφορικό *Hochschild*

$$b : \Omega^n(A) \to \Omega^{n-1}(A)$$

που δίδεται από την

$$b(a_0, a_1, ..., a_n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (a_0, a_1, ..., a_j a_{j+1}, ..., a_n) + (-1)^n (a_n a_1, a_2, ..., a_{n-1})$$

Η σχέση των δύο παραπάνω διαφορικών είναι η εξής:

$$b(\omega da) = (-1)^{|\omega|}(\omega a - a\omega) = (-1)^{|\omega|}[\omega, a]$$

όπου $|\omega| = degree\ of\ \omega$.

Επίσης υπάρχει και ο τελεστής *Karoubi* που είναι βαθμού μηδέν

$$k : \Omega^n(A) \to \Omega^n(A)$$

και δίδεται από την σχέση

$$k(\omega da) = (-1)^{|\omega|}(da)\omega$$

(για βαθμούς μηδέν και κάτω είναι ίσος με την μονάδα).

Πρόταση 1. Ο τελεστής *Karoubi* μετατίθεται με τους b, d.

Πρόταση 2. Ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$bd + db = 1 - k.$$

Θεωρώντας λοιπόν τους τελεστές b, d ως αντίστοιχους των d^*, d της κλασικής γεωμετρίας, ορίζουμε τον τελεστή *Laplace* της ΜΜΓ ως ακολούθως:

$$\Delta = bd + db = 1 - k.$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε το εξής:

Θεώρημα 2. Υπάρχει η παρακάτω ανάλυση σε ευθύ άθροισμα

$$\Omega A = P\Omega A \oplus P^{\perp}\Omega A,$$

όπου ο τελεστής *Laplace* είναι *μηδενοδύναμος* στον πρώτο όρο και *αντιστρέψιμος* στον δεύτερο όρο (και ομοτοπικός με το μηδέν).

Ο χώρος $P\Omega A$ αποτελεί τον χώρο των αρμονικών μορφών της ΜΜΓ.

Για να βελτιώσουμε το παραπάνω θεώρημα, ορίζουμε τον *επανακλιμακούμενο τελεστή Laplace*

$$\hat{\Delta} = [b, Nd] = bNd - Ndb$$

ο οποίος *μηδενίζεται* στον όρο $P\Omega A$ (όπου N ο τελεστής βαθμού, δηλαδή είναι ίσος με τον βαθμό μιας μορφής επί την ίδια την μορφή).

Ορισμός 2. Στο $P^{\perp}\Omega A$ ορίζουμε τον τελεστή *Green*

$$G := (1-k)^{-1},$$

τον αντίστροφο της Λαπλασιανής, που αποτελεί τον **μη μεταθετικό μποζονικό διαδότη**.

Το πρόσφατο θεώρημα αυτό του γράφοντος, πέρα από την αυτόνομη αξία του για τα μαθηματικά, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον και για την φυσική διότι όπως μάθαμε τα τελευταία 10 περίπου χρόνια από τους Connes − Witten κλπ, η παρουσία επιπλέον πεδίων Yang − Mills μετατρέπει τον χωρόχρονο από πολλαπλότητα Ρήμαν σε ΜΜ χώρο.

Απόδειξη Θεωρήματος 2. (Περίγραμμα Απόδειξης). Η Απόδειξη του Θεωρήματος 2 στηρίζεται στην παρατήρηση κλειδί πως ο τελεστής *Karoubi* ικανοποιεί την πολυωνυμική εξίσωση

$$(k^n - 1)(k^{n+1} - 1) = 0.$$

Συνεπώς το σύνολο (διανυσματικός χώρος) ΩA αναλύεται σε ευθύ άθροισμα γενικευμένων ιδιόχωρων που αντιστοιχούν στις ρίζες του παραπάνω πολυωνύμου. Οι ρίζες του κάθε παράγοντα ξεχωριστά είναι οι n-στές ρίζες της μονάδας. Αφού οι αριθμοί $n, n+1$ είναι σχετικά πρώτοι, τα δύο αυτά σύνολα ριζών έχουν μόνο το 1 κοινό στοιχείο, συνεπώς το 1 αποτελεί την μοναδική διπλή ρίζα και

οι υπόλοιπες είναι απλές ρίζες. Συνεπώς το ΩA γράφεται ως ευθύ άθροισμα του γενικευμένου ιδιόχωρου

$$Ker(1-k^2)$$

που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 και των ιδιόχωρων

$$Ker(k-\zeta)$$

για κάθε ρίζα της μονάδας $\zeta \neq 1$. Συνοψίζοντας παίρνουμε την παρακάτω ανάλυση

$$\Omega A = Ker(1-k)^2 \oplus [\bigoplus_{\zeta \neq 1} Ker(k-\zeta)] = P\Omega A \oplus P^{\perp}\Omega A$$

όπου ο $1-k$ είναι μηδενοδύναμος στον πρώτο όρο και αντιστρέψιμος στον δεύτερο.

2 Κβαντική Βαρύτητα: Γιατί και γιατί όχι

Παρά τις προσπάθειες δεκαετιών, δεν έχουμε επιτύχει μέχρι σήμερα στο να βρούμε την κβαντική θεωρία της βαρύτητας. Κατ' αρχήν όμως ας αναρωτηθούμε: Η βαρυτική αλληλεπίδραση είναι όντως κβαντισμένη (και απλά δεν ξέρουμε ακόμη την θεωρία) ή μήπως η βαρύτητα είναι μια κλασική δύναμη τελικά και κβαντική βαρύτητα δεν υπάρχει;

Το βασικό επιχείρημα **κατά** της ύπαρξης της κβαντικής βαρύτητας είναι ότι στην φυσική αρχή του *κυματοσωματιδιακού δυϊσμού* που διέπει όλη την κβαντική φυσική (και του οποίου η μαθηματική έκφραση είναι η γνωστή σχέση αβεβαιότητας), στην περίπτωση της βαρύτητας μέχρι σήμερα δεν έχουν παρατηρηθεί ούτε βαρυτικά κύματα αλλά ούτε και βαρυτόνια (τα κβάντα του πεδίου βαρύτητας, οι φορείς τη βαρυτικής αλληλεπίδρασης).

Η ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων θεωρείται σχεδόν δεδομένη θεωρητικά (μετα-Νευτώνειες προσεγγίσεις/λύσεις των εξισώσεων βαρυτικού πεδίου *Einstein*) και σήμερα υπάρχουν διεθνώς 3-4 πειράματα υπό εκτέλεση για την ανίχνευσή τους (*GEO* 600, *LINGO*, *LISA* κλπ). Άμεση ανίχνευση βαρυτονίων είναι αδύνατη σήμερα και εξαιρετικά δύσκολη στο διηνεκές διότι τα βαρυτόνια αλληλεπιδρούν πολύ ασθενώς με τα άλλα σωμάτια. Μπορεί όμως να υπάρξουν έμεσες πειραματικές ενδείξεις για την ύπαρξή τους. Μια εξ αυτών θα δούμε

στην συνέχεια.

Τα βασικά επιχειρήματα **υπέρ** της ύπαρξης κβαντικής βαρύτητας είναι τα εξής:

1. Μαθηματική συνέπεια των εξισώσεων βαρυτικού πεδίου *Einstein* (χωρίς κοσμολογική σταθερά):

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi G T_{ab}.$$

Στο δεξί μέλος, ο τανυστής ενέργειας ορμής περιλαμβάνει μάζα και ενέργεια που δεν οφείλονται στο βαρυτικό πεδίο, αυτά είναι κβαντισμένα (τελεστής, η συνήθης ύλη γνωρίζουμε σήμερα ότι αποτελείται από κουάρκ και λεπτόνια, η ενέργεια αποτελείται από την ενέργεια του ηλεκτρασθενούς και του ισχυρού πεδίου), συνεπώς για λόγους μαθηματικής συνέπειας και το αριστερό μέλος (γεωμετρία) θα πρέπει να είναι επίσης κβαντισμένο (τελεστής. Το επιχείρημα αυτό, ίσως όχι ακριβώς σε αυτή τη μορφή, για πρώτη φορά διατυπώθηκε από τον *Dirac*).

2. Άρση των απειρισμών από τα θεωρήματα χωροχρονικών ανωμαλιών των $Hawking - Penrose$.

3. Συμβατότητα της φυσικής του μικρόκοσμου (κβαντικές θεωρίες) με την φυσική του μεγάκοσμου (ΓΘΣ), εδώ περιλαμβάνονται και θέματα όπως το βέλος του χρόνου, η εντροπία μελανών οπών, η ακτινοβολία μελανών οπών, η συνθήκη απουσίας συνόρου των $Hartle - Hawking$ κλπ.

4. Διάφορα αισθητικά και φιλοσοφικά επιχειρήματα.

3 Η Αρχή Ολογραφίας του 't Hooft

Υποθέτουμε ότι έχουμε πεισθεί για την ύπαρξη της κβαντικής βαρύτητας (η εξεύρεση της αντίστοιχης θεωρίας αποτελεί κατά καθολική ομολογία το σημαντικότερο ανοικτό πρόβλημα της φυσικής σήμερα). Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις, οι πιο παλιές και ίσως πιο δημοφιλείς είναι αυτές που προέρχονται από θεωρίες σε μεγαλύτερες διαστάσεις (υπερχορδές, υπερβαρύτητα, Μ-Θεωρία, συστροφική γεωμετρία). Το 1993 εμφανίστηκε η αρχή ολογραφίας του Ολλανδού *Gerardus 'tHooft* (από τους μεγαλύτερους εν ζωή θεωρητικούς φυσικούς, βραβείο Νομπέλ Φυσικής 1999 για την απόδειξη της επανακανονικοποίησης των

θεωριών βαθμίδας τύπου $Yang - Mills$ αλλά και πατέρα των ίνσταντονς, του μονοπόλου $'tHooft - Polyakov$ στις μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας κλπ), που δηλώνει το εξής (βλέπε G. 't Hooft: "Dimensional Reduction in Quantum Gravity", gr-qc/9310026):

Η κβαντική βαρύτητα σε μια πολλαπλότητα Ρήμαν διάστασης $(d+1)$ είναι ισοδύναμη με μια σύμμορφή κβαντική θεωρία στο σύνορο (διάστασης προφανώς d) όπου σε κάθε στοιχειώδη υπερεπιφάνεια Planck εμβαδού l_P^d (όπου $l_P = 10^{-35}m$ το μήκος του Planck) στο σύνορο, αντιστοιχεί ένας βαθμός ελευθερίας της θεωρίας.

Υπάρχει και μια έκδοση της αρχής ολογραφίας στα πλαίσια της Μ-Θεωρίας (εικασία $Maldacena$) που συνδέει σύμμορφες θεωρίες στο σύνορο και κβαντικη βαρύτητα σε $anti\ de\ Sitter$ χώρους με την χρήση της $S - duality$.

Η χαμένη διάσταση αντιστοιχεί στο $rescaling$ (αλλαγή κλίμακας) και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε σύμμορφες θεωρίες στο σύνορο.

Η μαθηματική έκφραση της ολογραφίας είναι η δήλωση πως *η κβαντική βαρύτητα αποτελεί μια τοπολογική κβαντική θεωρία πεδίων (ΤΚΘΠ).*

Το κίνητρο πίσω από την ολογραφία είναι η περίφημη και άκρως αντιδιαισθητική εξίσωση της εντροπίας μελανών οπών των $Bekenstein - Hawking$ στα μέσα της δεκαετίας 1970 που δηλώνει ότι η εντροπία μελανών οπών είναι ανάλογη του **εμβαδού** (και όχι του *όγκου* όπως γνωρίζουμε από την συνήθη θερμοδυναμική και στατιστική φυσική) της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζεται από τον ορίζοντα των γεγονότων και περιβάλει τις μελανές οπές. (Σπέρματα βέβαια προϋπήρχαν από πριν, βλέπε για παράδειγμα τα περί μηχανισμών μη τοπικότητας του $Penrose$, ακόμη και το παράδοξο EPR).

Ας εξηγήσουμε το περί ΤΚΘΠ: Γνωρίζουμε καλά σήμερα ότι το μαθηματικό πλαίσιο της ΓΘΣ είναι η (ψευδο-)ρημάνεια γεωμετρία, δηλαδή οι εξισώσεις του πεδίου βαρύτητας αφορούν μια τετραδιάστατη πολλαπλότητα Ρήμαν (M^4, g). Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν και ως εξισώσεις $Euler - Lagrange$ της δράσης $Einstein - Hilbert$

$$S(M^4, g) = \frac{1}{2K} \int_{M^4} RdV$$

όπου η σταθερά

$$K = \frac{8\pi G}{c^4},$$

ο στοιχειώδης όγκος

$$dV = \sqrt{-g}d^4x$$

και $R = R(g)$ η βαθμωτή καμπυλότητα που είναι συνάρτηση μόνο της μετρικής g.

Για να κβαντώσουμε το πεδίο βαρύτητας συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση επιμερισμού

$$Z[M^4] = N \int e^{iS} \mathcal{D}g,$$

(όπου N μια σταθερά κανονικοποίησης).

[*Σημείωση:* Ακολουθούμε τον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό που έχει το πλεονέκτημα ότι είναι σχετικιστικά αναλλοίωτος. Φανερά από την συνάρτηση επιμερισμού (έστω στην γενική πρίπτωση η δράση είναι $S = S(\phi)$), υπολογίζει κανείς εύκολα την (μη-κανονικοποιημένη) μέση τιμή ενός παρατηρήσιμου φυσικού μεγέθους W από την σχέση

$$< W >= \int e^{iS} W \mathcal{D}\phi.$$

Σε μια μη-σχετικιστική προσέγγιση, μια κβαντική θεωρία πεδίων περιγράφεται μέσω του τελεστή χρονικής εξέλιξης

$$e^{itH}$$

που δρα σε κάποιον χώρο Χίλμπερτ. Ο απειροστός γεννήτορας H είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος. Η θεμελιώδης σχέση μεταξύ Λαγκρανζιανού και Χαμιλτονιανού φορμαλισμου περιγράφεται από την σχέση ($2-$*point correlation function*)

$$< e^{iTH}\phi_0, \phi_T >= \int e^{iS} \mathcal{D}\phi$$

όπου το τροχιακό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος υπολογίζεται σε όλα τα πεδία που κυμαίνονται μεταξύ του $\phi_0 = \phi(x, 0)$ και του $\phi_T = \phi(x, T)$ για $0 \leq t \leq T$. Πιο συγκεκριμένα ισχύει η εξίσωση

$$Tr(e^{iTH}) = \int e^{iS} \mathcal{D}\phi$$

όπου στο τροχιακό ολοκλήρωμα η ϕ είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^3 \times S^1_T$ όπου S^1_T ο κύκλος περιφέρειας T.]

Αν σκεφτεί κανείς διαισθητικά την πραπάνω συνταγή, αυτό που κάνουμε είναι να πάρουμε την δράση που είναι μια συνάρτηση 2 μεταβλητών, της τοπολογίας της πολλαπλότητας M^4 και της μετρικής g (ας την σκεφτούμε ως έναν ολοκληρωτικό πυρήνα) και τοποθετώντας την μέσα στο τροχιακό ολοκλήρωμα, ολοκληρώνουμε την μια μεταβλητή (την μετρική). Εάν είμαστε σε θέση να εκτελέσουμε το ολοκλήρωμα, το αποτέλεσμα θα είναι συνάρτηση μόνο της άλλης μεταβλητής που δεν ολοκληρώσαμε, δηλαδή της τοπολογίας της M^4. Συνεπώς, ο διαισθητικός (απλός) ορισμο μιας ΤΚΘΠ είναι πως *είναι μια κβαντική θεωρία της οποίας η συνάρτηση επιμερισμού αποτελεί μια τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα.*

Για μια αλγεβρική προσέγγιση κατασκευής σύμμορφων κβαντικών θεωριών σε διαστάσεις μεγαλύτερες από 2 βλέπε και μια εργασία του γράφοντος I.P. Zois: "Operads and Quantum Gravity", Repts on Math. Phys.,Vol 55.3 (2005) 307-323.

4 Αξιώματα Atiyah για τις ΤΚΘΠ

Ο αυστηρός ορισμός μιας ΤΚΘΠ δόθηκε από τον *M.F.Atiyah* κατά την δεκαετία του 1990 (βλέπε για παράδειγμα M.F. Atiyah: "The Geometry and Physics of Knots", Cambridge University Press, 1993):

Ορισμός 3. Μια ΤΚΘΠ είναι ένας συναρτητής Z από την κατηγορία των πολλαπλοτήτων στην κατηγορία των (μιγαδικών) διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης ο οποίος:

(α). Σε κάθε συμπαγή, προσανατολίσιμη, λεία πολλαπλότητα M^d διάστασης d αντιστοιχεί έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο $Z(M^d)$ πεπερασμένης διάστασης.

(β). Σε κάθε συμπαγή, προσανατολίσιμη, λεία πολλαπλότητα N^{d+1} διάστασης $d+1$ της οποίας το σύνορο $\partial N^{d+1} = M^d$, αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $Z(N^{d+1}) \in Z(M^d)$.

Ο Z θα πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω πέντε αξιώματα:

(A1). *Συζυγία*:

$$Z(M^*) = Z(M)^*$$

όπου M^* η πολλαπλότητα με αντίθετο προσανατολισμό από την M και $Z(M)^*$

ο δυϊκός διανυσματικός χώρος του $Z(M)$.

(A2). *Πολλαπλασιαστικότητα*:

$$Z(M_1 \cup M_2) = Z(M_1) \otimes Z(M_2),$$

όπου $\cup$ η ξένη ένωση.

(A3). *Προσεταιριστικότητα*: Για μια σύνθετη συνομορία

$$N = N_1 \cup_{M_2} N_2$$

έχουμε

$$Z(N) = Z(N_2)Z(N_1) \in Hom(Z(M_1), Z(M_2)).$$

(A4).

$$Z(\emptyset) = \mathbb{C}.$$

(A5).

$$Z(M \times I) = id_{Z(M)}.$$

Τα αξιώματα αυτά εμπεριέχουν τους γνωστούς κανόνες της κβαντικής μηχανικής (δεν είναι προφανές, θέλει εκτεταμένη απόδειξη, βλέπε M.F. Atiyah: "Topological Quantum Field Theories", IHES Publ. Math. 68 (1996)).

Παρατηρήσεις:
1. Από το A4 έπεται ότι για κλειστές πολλαπλότητες ($\partial M = \emptyset$) παίρνουμε αριθμητικές αναλλοίωτες (συμφωνία με τον απλό διαιασθητικό ορισμό).
2. Εάν κόψουμε μια $(d+1)$-πολλαπλότητα

$$N = N_1 \cup_M N_2$$

κατά μήκος μιας d-πολλαπλότητας M και εφαρμόσουμε το A3 παίρνουμε

$$Z(N) =< Z(N_1), Z(N_2) >$$

όπου το ζευγάρωμα $<,>$ είναι μεταξύ των δυϊκών χώρων $Z(M)$ και $Z(M)^*$. Συνεπώς αριθμητικές αναλλοίωτες προκύπτουν από τέτοιες τομές (αυτό αποτελεί μια χρήσιμη συνταγή υπολογισμών).
3. Η συναρτητικότητα της Z μαζί με το A5 συνεπάγονται *ομοτοπική αναλλοιότητα* (και άρα η ομάδα $Diff^+(M)$ των τοπικών διαφορομορφισμών της M που διατηρούν τον προσανατολισμό δρα στον διανυσματικό χώρο $Z(M)$ μέσω της ομάδας συνιστωσών $\Gamma(M)$).
4. Έχουμε ότι

$$\dim(Z(M)) = Z(M \times S^1).$$

5. Για μια $(d+1)$-πολλαπλότητα N με $\partial N = M$, το $Z(N) \in Z(M)$ δίδει την συνάρτηση επιμερισμού.
6. Εννοείται πως μόνον ειδικού τύπου Λαγκρανζιανές δίδουν συναρτήσεις επιμερισμού που είναι τοπολογικά αναλλοίωτες ποσότητες.
7. Ο διανυσματικός χώρος $Z(M)$ αντιστοιχεί στον χώρο $Hilbert$ της κβαντικής θεωρίας.
8. Ο ενδομορφισμός του $Z(M)$ που δίδεται από την κυλινδρική συνομορία $Z(M \times I)$, όπου I κάποιο διάστημα, αντιστοιχεί στον τελεστή εξέλιξης μιγαδικού χρόνου

$$e^{-tH}$$

όπου H η Χαμιλτονιανή και t το μήκος του διαστήματος I.
9. Από το Α5 έπεται ότι η Χαμιλτονιανή μηδενίζεται οπότε οι ΤΚΘΠ δεν έχουν δυναμική. Ακόμη όλες οι κβαντικές καταστάσεις είναι θεμελιώδεις (ο χώρος Χίλμπερτ της θεωρίας έχει πεπερασμένη διάσταση) και μη τετριμμένες διαδόσεις επισυμβαίνουν μέσω συνομοριών (*cobordisms*).

Δυστυχώς μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης επιμερισμού για την δράση $Einstein - Hilbert$ αλλά εάν αυτό γίνει, το αποτέλεσμα θα είναι μια τοπολογικά αναλλοίωη ποσότητα της πολλαπλότητας.

Οι ΤΚΘΠ έχουν και ένα ακόμη πολύ ελκυστικό χαρακτηριστικό: *Είναι οι μόνες γνωστές κβαντικές θεωρίες που είναι γενικά συναλλοίωτες* (ιδιότητα που θα πρέπει να έχει κάθε κβαντική θεωρία βαρύτητας ή ενοποιημένη θεωρία που περιλαμβάνει και την βαρύτητα).

Παραδείγματα ΤΚΘΠ: Μέχρι σήμερα είναι γνωστά 5 παραδείγματα ΤΚΘΠ:

1. $(2+1)$-*Abelian Chern-Simons του A. Schwarcz.* Η δράση δίδεται από την σχέση

$$S = \int_{N^3} Tr(A \wedge dA)$$

όπου A μια συνοχή σε μια $U(1)$ δέσμη πάνω από την 3-πολλαπλότητα N^3 (οπότε μπορούμε να παραλείψουμε το Ίχνος αφού η συνοχή παίρνει πραγματικές τιμές). Η συνάρτηση επιμερισμού είναι

$$Z(N^3) = (Det_\zeta \Delta_1)^{-1/4} (Det_\zeta \Delta_0)^{3/4}$$

όπου Δ_1 και Δ_0 οι τελεστές Λαπλάς που δρούν στις 1-μορφές και στις 0-μορφές της N^3 αντίστοιχα ενώ με Det_ζ συμβολίζουμε την κανονικοποιημένη μέσω της συνάρτησης ζ ορίζουσα των τελεστών Λαπλάς. Το σημαντικό θεώρημα εδώ

είναι ότι ενώ ο τελεστής Λαπλάς εξ ορισμού εξαρτάται από μια μετρική, το παραπάνω γινόμενο είναι ανεξάρτητο της μετρικής, δηλαδή αποτελεί μια τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα της πολλαπλότητας.

2. $(2+1)$-*Non-Abelian Chern-Simons ή ΤΚΘΠ των Jones-Witten.* Η δράση είναι

$$S = \frac{1}{4\pi}\int_{N^3} Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A)$$

όπου A μια συνοχή σε μια $SU(n)$ δέσμη (με τιμές στην αντίστοιχη άλγεβρα *Lie*) πάνω από την 3-πολλαπλότητα N^3. Η συνάρτηση επιμερισμού είναι τα γνωστά Jones topological knot invariants. Γενίκευση της παραπάνω αποτελεί η θεωρία των Reshetikin, Turaev, Vassiliev με τις αντίστοιχες αναλλοίωτες ποσότητες που δεν ήταν γνωστές στα μαθηματικά (προέκυψαν από την φυσική).

3. $(3+1)$-*Donaldson-Floer-Witten ΤΚΘΠ.* Η δράση είναι αυτή της $N=2$ υπερσυμμετρικής θεωρίας $Yang-Mills$ και η συνάρτηση επιμερισμού είναι τα περίφημα Donaldson polynomial invariants για 4-πολλαπλότητες.

4. $(3+1)$-*Seiberg-Witten ΤΚΘΠ.* Είναι η $S-dual$ της προηγούμενης, συνάρτηση επιμερισμού είναι τα Seiberg-Witten invariants για 4-πολλαπλότητες. Δεν ήταν γνωστά στα μαθηματικά, προέκυψαν από την φυσική.

Οι ΤΚΘΠ 3 και 4 έχουν την μεγαλύτερη σχέση με την φυσική πραγματικότητα (4 διαστάσεις) και απαντούν και στο γνωστό πρόβλημα του quark confinement (υποθέτοντας όμως υπερσυμμετρία).

5. $(d+1)$-*Gromov-Kontsevich-Witten ΤΚΘΠ* (γνωστή και ως *τοπολογικά σ μοντέλα* και περιλαμβάνει και τις λεγόμενες τοπολογικές υπερχορδές). Η δράση είναι η δράση των μοντέλων σ με B-πεδίο ως δυναμικό με 2 δείκτες και η συνάρτηση επιμερισμού είναι οι αναλλοίωτες *Gromov* για συμπλεκτικές (σχεδόν μιγαδικές) πολλαπλότητες.

5 Το πείραμα *GEO* 600 και η πρώτη πειραματική επιβεβαίωση της ολογραφίας

Το πείραμα *GEO*600 αποτελεί μια Αγγλογερμανική συνεργασία (εγκαταστάσεις στο Ανόβερο, συμμετοχή και του Πανεπιστημίου του Κάρντιφ) και αποσκοπεί στην ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων (ένα εκ των 3-4 διεθνώς που

βρίσκονται υπο εκτέλεση αυτή την περίοδο για τον σκοπό αυτό). Ουσιαστικά αποτελείται από δύο εξαιρετικά ευαίσθητους χάρακες μήκους 600 μέτρων σε μια διάταξη πλευρών μιας ορθής γωνίας. Δέσμη ακτίνων *laser* χρησιμοποιείται για την ανακάλυψη σχετικών διαφορών μήκους στις δύο αυτές κάθετες κατευθύνσεις λόγω διαταραχών της μετρικής παρουσία κάποιου βαρυτικού κύματος (εξαιτίας της φύσης των παλλιροιακών δυνάμεων που επιμηκύνουν στην μια διεύθυνση και συμπιέζουν στην κάθετη). Στην ουσία πρόκειται για ένα ιντερφερόμετρο. *Για μήνες παρατηρείται ανεξήγητος θόρυβος υποβάθρου* γύρω στα 700 Hz.

Παρά τις προσπάθειες και την εξονυχιστική ανάλυση δεν μπόρεσε να ερμηνευθει ο θόρυβος (το σενάριο μοιάζει με την ανακάλυψη της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου στο παρελθόν).

Η μοναδική πιθανή ερμηνεία μέχρι σήμερα που έχει δοθεί είναι από τον *C.J.Hogan*, διευθυντή του κέντρου σωματιδιακής αστροφυσικής του *Fermilab* (βλέπε C.J. Hogan: "Measurement of Quantum Fluctuations in Geometry", Phys. Rev. D, Vol 77 (2008), page 104031) και στηρίζεται στην αρχή ολογραφίας.

Αρχικά ο *Hogan* κάνει την εξής παρατήρηση κλειδί: Εάν θεωρήσουμε ένα στιγμιότυπο του σύμπαντος κάποια χρονική στιγμή, το σύνορό του θα είναι κάποια σφαίρα 2 διαστάσεων έστω ακτίνας R. Στην επιφάνεια αυτής υπάρχουν

$$N = \frac{4\pi R^2}{l_P^2}$$

βαθμοί ελευθερίας συνολικά. Εάν η ολογραφία είναι σωστή, τότε το ίδιο πλήθος βαθμών ελευθερίας θα πρέπει να υπάρχει και στο σώμα (*bulk*), συνεπώς εάν χωρίσουμε το σύμπαν (δηλαδή τον όγκο της σφαίρας 3 διαστάσεων) σε στοιχειώδεις κύβους με ακμή έστω x, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\frac{4\pi R^2}{l_P^2} = \frac{4/3\pi R^3}{x^3}.$$

Λύνοντας αυτή την απλή εξίσωση, υπολόγησε ότι $x \sim 10^{-16}m$, *πολύ μεγαλύτερο από το μήκος Planck*, άρα εάν η ολογραφία είναι σωστή, θα πρέπει να υπάρχουν παρατηρήσιμα φαινόμενα σε αυτή την τάξη μεγέθους που είναι προσβάσιμη με την σημερινή τεχνολογία (το μέγεθος ενός πρωτονίου είναι $\sim 10^{-15}m$). (Ένα λεπτό σημείο που χειάζεται προσοχή είναι το σύνορο και η ακτίνα του σύμπαντος διότι το σύμπαν διαστέλλεται και μάλιστα με επιταχυνόμενο ρυθμό λόγω σκοτεινής ενέργειας: Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, ο *Hogan* θεώρησε ως σύνορο την ιδεατή επιφάνεια πέρα από την οποία το φώς δεν έχει ακόμη

προλάβει να μας φτάσει κατά τα 13.7 δις χρόνια που είναι η ζωή του σύμπαντος. Αναφέρουμε επίσης ότι ο *Hogan* είναι ένας από αυτούς που ανακάλυψαν την λεγόμενη σκοτεινή ενέργεια, *dark energy*).

Ακολουθώντας μια κατάλληλη ανάλυση, καταλήγει σε μια εξίσωση της μορφής

$$< \Delta l^2 >_H \sim ctl_P \sin\theta (\sin 2\theta)^2$$

όπου θ η *incidence angle* ως προς την κάθετη για να περιγράψει την ασάφεια (*indeterminacy*) των σχετικών χωροχρονικών θέσεων των γεγονότων στο σώμα εξ αιτίας της ολογραφίας στο σύνορο. Η ασάφεια αυτή προβλέπει διακυμάνσεις από την κλασική γεωμετρία με την μορφή ολογραφικού θορύβου ο οποίος και υπολογίζεται. Γενικά, κάθε σήμα ιντερφερόμετρου εμπεριέχει κάποιο θόρυβο λόγω της απροσδιοριστίας των σχετικών θέσεων των γεγονότων ανάκλασης. Ο θόρυβος αντιστοιχεί σε μια συγκένρωση φάσης οπότε παρατηρούνται κροσσοί συμβολής. Και προς μεγάλη έκπληξη όλων, **ο θόρυβος ολογραφίας που προέγνωσε ο** *Hogan* **βρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με τον παρατηρούμενο θόρυβο του ιντερφερόμετρου του** *GEO* **600**.

Φυσικά απαιτούνται επιπλέον επιβεβαιώσεις, το επόμενο βήμα είναι η δοκιμή με χρήση ιντερφερόμετρου ατόμων αντί φωτονίων.

Εξυπακούεται ότι εάν η ολογραφία αποδειχθεί τελεσίδικα πεφαματικά, αυτό ατομάτως θα απαντήσει καταφατικά στο ερώτημα εάν υπάρχει ή όχι κβαντική βαρύτητα και θα είναι δεδομένο πως αποτελεί μια ΤΚΘΠ οπότε θα ενταθούν οι προσπάθειες για την εξεύρεση της αντίστοιχης θεωρίας (υπολογισμός της συνάρτησης επιμερισμού και προσδιορισμός των τοπολογικά αναλλοίωτων ποσοτήτων που αυτή εκφράζει).

6 Γιατί χρειαζόμαστε την ΜΜΓ

Όλα τα παραπάνω αφορούν την βαρύτητα και την κλασική γεωμετρία Ρήμαν. Τα τελευταία 10 χρόνια όμως διάφορα επιχειρήματα μας έχουν πια πείσει ότι η θεμελιώδης γεωμετρία του χωρόχρονου δεν είναι η κλασική γεωμετρία Ρήμαν αλλά η ΜΜΓ, με άλλα λόγια εάν κάποιος επιχειρήσει να κάνει κβάντωση όχι μόνο του πεδίου βαρύτητας αλλά όλων των γνωστών 4 αλληλεπιδράσεων, το σωστό μαθηματικό πλαίσιο είναι η ΜΜΓ. Για τον σκοπό αυτό θα παραθέσουμε τρία βασικά επιχειρήματα, τα δύο πρώτα προέρχονται από τις μεγαλύτερες διαστάσεις (Μ-Θεωρία, υπερχορδές) ενώ το τρίτο και πιο πρόσφατο είναι αυστηρά

τετραδιάστατο.

Από τα μέσα της δεκαετίας 1990 κατέστη πλέον σαφές (κυρίως από τις εργασίες του *Witten*) ότι υπάρχει μια ευρύτερη θεωρία που λέγεται Μ-Θεωρία, η οποία ζει στις 11 διαστάσεις και γενικεύει τις θεωρίες υπερχορδών (10 διαστάσεις) υπό την έννοια πως πέραν των υπερχορδών (αντικείμενα με διάσταση 1) εμπεριέχει και εκτεταμένα αντικείμενα μεγαλύτερης από 1 διάστασης, τις λεγομενες *μεμβράνες (branes)*. Πολλά στοιχεία αυτής της θεωρίας είναι ακόμη άγνωστα αλλά ξέρουμε πως έχει 5 οριακές θεωρίες, τις θεωρίες υπερχορδών τύπου I, IIA, IIB και ετεροτική και την θεωρία υπερβαρύτητας στις 11 διαστάσεις. Επειδή οι θεωρίες αυτές ζουν σε περισσότερες διαστάσεις, η μακροσκοπική διάσταση του σύμπαντος που είναι 4 προκύπτει μέσω μιας διαδικασίας που λέγεται *συμπαγοποίηση*. Δυστυχώς μέχρι σήμερα είναι γνωστές κάπου 10^{500} συμπαγοποιήσεις, κάτι που οπωσδήποτε αποτελεί σημαντικό αρνητικό χαρακτηριστικό των θεωριών αυτών.

Επιχείρημα 1. Το 1998 ο *Connes* απέδειξε ότι η θεωρία υπερχορδών τύπου IIB (οι λεγόμενες υπερχορδές $Green - Schwarcz$) επιδέχονται *επιπρόσθετες συμπαγοποιήσεις σε μη μεταθετικούς χώρους, πιο συγκεκριμέμα σε μη-μεταθετικά tori* (βλέπε A. Connes, M.R. Douglas, A. Schwarcz: "Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactifications on Tori", JHEP 9802:003 (1998)). Η απόδειξη είναι έμεση, αρχικά αποδεικνύεται το αποτέλεσμα για το λεγόμενο μοντέλο πινάκων IKKT και στη συνέχεια αποδεικνύεται η ισοδυναμία του μοντέλου IKKT με την θεωρία υπερχορδών τύπου IIB όταν το μέγεθος των πινάκων τείνει στο άπειρο. (Τα μοντέλα πινάκων αποτελούν εξέλιξη των μοντέλων σ: Στην περίπτωση των υπερχορδών, αντί να μελετήσουμε αρμονικές απεικονήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων Ρήμαν διάστασης 2 (που αντιπροσωπεύουν τα κοσμικά φύλλα των χορδών) και διάστασης 10 (οι λεγόμενοι χώροι στόχοι) και στην συνέχεια να επιβάλουμε κβάντωση με σχέσεις κανονικής μετάθεσης, μελετάμε απεικονήσεις μεταξύ συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων διάστασης 2 και μιας μη μεταθετικής άλγεβρας πινάκων σαν την $M_N(\mathbb{C})$).

Επιχείρημα 2. Ένα χρόνο αργότερα, το 1999 ο *Witten* αποδεικνύει ότι το ίδιο συμβαίνει και για την θεωρία υπερχορδών τύπου I παρουσία $B - fields$ και $D - branes$ (βλέπε N. Seiberg, E. Witten: "String Theory and Noncommutative Geometry", JHEP 9909:032 (1999)). Τα πεδία B είναι δυναμικά με δύο δείκτες που χρησιμοποιούνται για να συσχετίσουν (*gauge*) τα κοσμικά φύλλα (επιφάνειες) των υπερχορδών.

Επιχείρημα 3. Το 2007 σε ένα εντυπωσιακό άρθρο ο *Connes* αποδεικνύει ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του στάνταρ μοντέλου (διάσταση 4,

περιλμβάνει βαρύτητα, πεδία βαθμίδας για ηλεκτρασθενή και ισχυρή αλληλεπίδραση, κουάρκς, λεπτόνια, νετρίνα, συζεύξεις *Yukawa*, πεδίο *Higgs* και γενικά ο,τιδήποτε έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά μέχρι στιγμής στην φυσική), προκύπτει ως η *θεμελιώδης κλάση της K-Ομολογίας* ενός μη μεταθετικού χώρου που προκύπτει ως Καρτεσιανό γινόμενο μιας πολλαπλότητας σπιν διάστασης 4 επί έναν διακριτό χώρο μετρικής διάστασης 0 και KO-διάστασης 6 *mod* 8 (βλέπε A.H. Chamseddine, A. Connes, M. Marcolli: "Gravity and the Standard Model with Neutrino Mixing", Adv. Theor. Math. Phys. 11 (2007), 991-1089. Η εργασία αυτή του *Connes* έδωσε το έναυσμα για να διοργανωθεί το ετήσιο ερευνητικό πρόγραμμα ΜΜΓ και Φυσική στο Ινστιτούτο Ισαάκ Νεύτων του Κέιμπριτζ στο οποίο ήταν προσκεκλημένος και ο γράφων).

Στην ίδιο μήκος κύματος θα μπορούσαμε να αναφέρουμε και ένα ανάλογο αποτέλεσμα του γράφοντος που αφορά την υπερβαρύτητα 11 διαστάσεων (βλέπε I.P. Zois: "Noncommutativity vs. Gauge Symmetry", hep-th/0303158, IHES and Oxford preprint, MCFA Annals Vol. IV 2006).

Όλα τα παραπάνω συνηγορούν στο ότι παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον η κατασκευή μη μεταθετικών τοπολογικών κβαντικών θεωριών πεδίων (ΜΜΤΚΘΠ) ως το κατάλληλο πλαίσιο ενοποιημένων κβαντικών θεωριών που συμπεριλαμβάνουν και την βαρύτητα. Προς την κατεύθυνση αυτή το μη μεταθετικό Θεώρημα Hodge παίζει σημαντικό ρόλο. Ελπίζουμε δε πως όταν συμπληρωθεί το παζλ, η νέα μη-μεταθετική τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα που ανακάλυψε ο γράφων κατά την διδακτορική του διατριβή στην Οξφόρδη θα βρεί τον ρόλο της μέσα στις ΜΜΤΚΘΠ (βλέπε http://ora.ouls.ox.ac.uk/objects/uuid:c350f73e-5e44-4942-8674-4321f5075b1e αλλά και I.P. Zois: "A New Invariant for σ models", Comm. Math. Phys. 209.3 (2000) 757-783 and hep-th/9904001).

Ευχαριστώ για την προσοχή σας.

Ιωάννης Π. Ζώης
Μαθηματικός Φυσικός (*M.Sc* Cantab, *D.Phil* Oxon)
E-mail: i.zois@exeter.oxon.org
http://ipzoisscience.googlepages.com/home